

# Å være matematisk – elevens kompetanse i matematikk

# 3

*3-tallets «makt» forekommer overalt og speiler verdens tredelte natur i blant annet himmel, jord og vann. I Japan, derimot, står de tre klenodiene speilet, sverdet og edelstenen for sannhet, mot og medlidenhet.*

Dette kapitlet starter med å presentere en del resultater fra et opplegg gjennomført i en sjetteklasser der flere sider ved elevenes matematikkompetanse blir utfordret. Delkapittel 3.2 viser hvordan kompetansebegrepet er presentert i den danske KOM-rapporten fra 2002 og i en rapport fra National Research Council i USA fra 2001. Rapportenes påvirkning på matematikkundervisningen i norske skoler blir også problematisert. I delkapittel 3.3 presenteres og drøftes noen viktige aspekter ved det å være matematisk i tillegg til delkompetansene som er beskrevet i 3.2. Kapitlet avslutter med å drøfte hva det betyr å være matematisk i et fellesskap i lys av opplegget som ble presentert i starten på kapitlet.

### 3.1 Svaret er 8 – hva er spørsmålet?

I en sjetteklasser arbeider hele trinnet over en fjorten dagers periode med aktiviteter, oppgaver og problemstillinger knyttet til et opplegg de har kalt: «Svaret er 8 – hva er spørsmålet?»<sup>1</sup> De setter av omkring 15 minutter hver dag til dette arbeidet.

Elevene starter nølende:

- Hvor mye er  $4 + 4$ ?
- Hvor mye er  $5 + 3$ ,  $6 + 2$ ,  $7 + 1$  og  $8 + 0$ ?

Nokså snart går de over til subtraksjonsoppgaver:

- Hvor mye er  $12 - 4$ ?
- Hvor mye er  $12008 - 12000$ ?

Så begynner noen å lete etter virkelig store tall der det ikke er så åpenbart at svaret blir 8, for eksempel:

Hvor mye er  $137567005 - 137566997$ ?

Andre prøver seg med kombinasjon av addisjon og subtraksjon med store tall, slik som:

Hvor mye er  $26553481 + 45621332 - 72174805$ ?

To dager seinere arbeider de med oppgaver med addisjon og subtraksjon av brøker med forskjellig nevner slik at svaret blir lik 8. Jørgen foreslår:

Hvor mye er  $2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{5} + 4\frac{3}{10}$ ?

Klassen får som lekse å finne nye oppgaver som gir svaret 8. Dagen etter kommer Eva med oppgaven «Hvor mange bein hadde Sleipner?»<sup>2</sup> og Kemal med oppgaven «Hvor mange sideflater er det i et oktaeder?» Elise foreslår: «Hvilket nummer i kongerekka med navnet Haakon vil kronprinsen vår få når han blir konge?», og Sebastian foreslår: «Hvilket tall sto på ryggen til Steven Gerrard da han spilte for Liverpool?»<sup>3</sup> Lise foreslår: «I går ertet katten vår to spurver, men den klarte ikke å fange dem. Hvor mange bein hadde disse tre dyra til sammen?» Sasha foreslår: «Mora mi har en bror og dobbelt så mange søstre. Faren min har like mange søstre som mor, og tre ganger så mange brødre som henne. Hvor mange tanter og onkler har jeg til sammen?»

Klassen samler inn tekstene, oppgavene og fortellingene, og i løpet av fjorten dager har elevene laget en omfattende samling av tekster og oppgaver. Noen svar

har benevning som kroner, meter eller liter. Det er oppgaver om prosent og med desimaltall, det dukker opp ligninger og geometrioppgaver. Silje forteller en dag at hun har snakket med søstera si på ungdomsskolen, og fra henne har hun fått oppgaven: «Hva er stigningstallet for funksjonen  $y = 8x - 1$ ?» De aller fleste elevene forstår lite eller ingenting av denne oppgaven, men den blir med i klassens samling, mest som en smakebit på en matematikk de kanskje kommer til å møte seinere.

Klassen diskuterer oppgaver og matematikkttekster med hverandre på skolen og i fritida, og med søsken og foreldre under middagen og ellers om ettermiddagen. Oppgavene blir samlet inn og mange av dem slått opp på oppslagstavle i klasserommet. På foreldremøtet gjenkjenner flere av foreldrene oppgaver som har blitt til etter diskusjoner hjemme hos dem.

Matematikkfaget har tradisjonelt vært et stille, disiplinierende fag. Ikke sjelden har en kunnet høre lærere komme med utsagn som: «Nå er det matematikk, så nå får jeg endelig en stille og rolig time. Elevene skal sitte og regne i bøkene sine det meste av timen, og jeg kan gå rundt og hjelpe en og en av dem.» Om det ikke uttales så eksplisitt, er det ofte det som skjer i matematikktimene.

I matematikk kommer ofte forskjellene på elevene tydelig fram. Et tegn på hvor god du er i matematikk, er hvor langt du er kommet i matematikkboka, hvor mange av oppgavene som er besvart riktig, eller hvor mange oppgaver du har gjort i ekstrasboka. Faget har blitt og blir fortsatt brukt i ulike sammenhenger til å rangere elevene, ikke bare i faget selv, men også etter evner og intelligens mer generelt. Dette gjøres enten direkte og eksplisitt eller mer indirekte. Faget har fått en status som faget for «de flinke».

I opplegget som er beskrevet ovenfor, kan alle elevene bidra hver på sin måte, og alle bidragene spiller sammen i klassens helhetlige besvarelse. For å forstå hvordan elevene blir utfordret i et slikt opplegg, trenger vi en forståelse av hva det betyr å ha matematikkompetanse, kompetanse som omfatter noe mer enn å kunne løse mange matematikkoppgaver på kort tid.

### 3.2 Kompetansebegrepet i matematikk

Matematisk kompetanse har de siste tiårene blitt et sentralt begrep når det gjelder å systematisere og analysere hva det vil si å være god eller flink i matematikk.

Det danske KOM-prosjektet (*Kompetencer og Matematiklæring*) har fått stor betydning også for skolematematikken i Norge. Mogens Niss og Tomas Højgaard Jensen ledet prosjektet som resulterte i rapporten *Kompetencer og matematikklæring* (Niss & Jensen, 2002).<sup>4</sup> Rapporten inneholder ideer og inspirasjon til utvik-

ling av matematikkundervisning. Den presenterer åtte delkompetanser som er vist i modellen i figur 3.1. Modellen illustrerer at delkompetansene henger sammen og delvis overlapper hverandre.

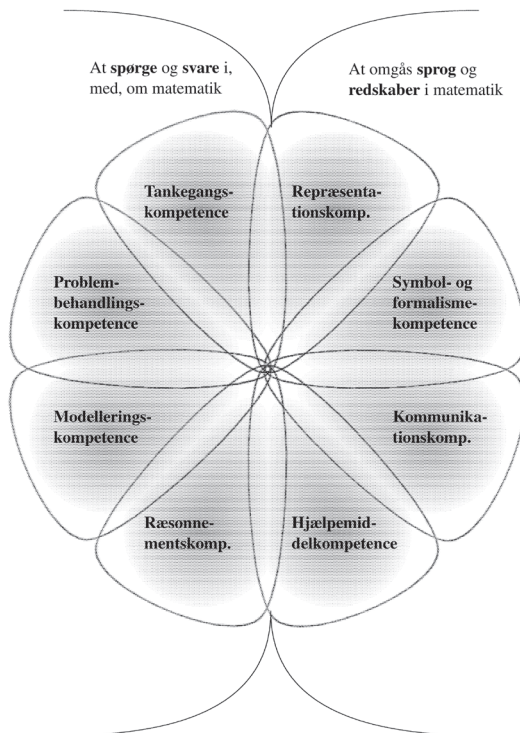
Oversikt over de åtte kompetansene er presentert slik i rapporten:

### At kunne spørge og svare i og med matematik

- Tankegangskompetence
  - at kunne udøve matematisk tankegang
- Problembehandlingskompetence – at kunne formulere og løse matematiske problemer
- Modelleringskompetence – at kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter
- Ræsonnementskompetence – at kunne ræsonnere matematisk

### At kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber

- Repræsentationskompetence – at kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold
- Symbol- og formalisme-kompetence – at kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme
- Kommunikationskompetence – at kunne kommunikere i, med og om matematik
- Hjælpemiddelkompetence – at kunne betjene sig af og forholde sig til hjælpemidler for matematisk virksomhed (inkl. it)



Figur 3.1

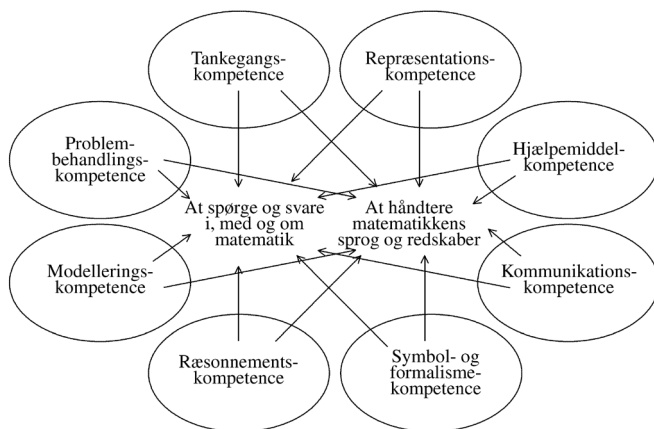
Delkompetansene er presentert, beskrevet og kommentert i rapporten, med mange eksempler som tydeliggjør hva kompetansene egentlig handler om. Rapporten fremhever eksplisitt at prosjektet ikke er et forskningsprosjekt, men mer tar sikte på å være et analytisk utviklingsprosjekt. Prosjektet presenterer ikke en overordnet *matematikkdidaktikk*, verken i teoretisk eller praktisk forstand. Det berører heller

ikke dannning, verken i alminnelighet eller matematikkfagets allmenndannende rolle. Det framgår også tydelig at rapporten ikke tar opp forhold som er sentrale i barns læring i matematikk, for eksempel holdninger til faget, læringspsykologiske sider ved matematikklæring eller samarbeidsevne og samhandling.

Målet med rapporten er blant annet å presentere en utvidet og helhetlig måte å forstå og analysere elevers kompetanse i matematikk på. Rapporten trekker fram viktige delkompetanser som en tidligere kanskje ikke har sett på som viktige i en helhetlig matematisk kompetanse.

Inndelingen av kompetansene slik det er vist i figur 3.1, er ikke ment til å illustre at kompetanseområdene er atskilt. Rapporten advarer mot et for rigid og kategorisk skille mellom delkomponentene. De påvirker hverandre gjensidig og knyttes til begge de to hovedkategoriene (se figur 3.2).

KOM-prosjektets beskrivelse av hva det innebærer å ha matematikkompetanse, har hatt stor innvirkning på utviklingen av matematikkfaget i Norge. Det har



Figur 3.2

medført at en har lagt langt mer vekt på en undervisning som hjelper elevene til å utvikle alle de åtte matematiske delkompetansene. Tidligere ble det lagt minimal vekt på flere av delkompetansene, kanskje særlig dem som handler om tankegang, resonnement, representasjon og kommunikasjon.

Kompetansebegrepet fra KOM-prosjektet ble direkte brukt i arbeidet med å utvikle oppgaver i tilknytning til nasjonale prøver i matematikk fra 2004<sup>5</sup>, og det stod sentralt i utviklingen av opplegg for fagutvikling og etterutdanning, særlig i regi av Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen, fra den samme tiden. Her ble det utviklet materiell som presenterte en forståelse og videreføring av kompetansebegrepet fra KOM-prosjektet.<sup>6</sup> I en del av dette materiellet prøver en å plassere de åtte delkompetansene innenfor kategoriene ferdigheter, anvendelse

og forståelse. En slik kategorisering kan virke klargjørende, men kan også bidra til en for snever forståelse av kompetansebegrepet, og spesielt av enkeltkompetansene. Noen av delkompetansene lar seg vanskelig plassere innenfor en slik kategorisering. Det gjelder for eksempel kommunikasjonskompetanse, som er plassert i kategorien «forståelse», mens den vel like gjerne kan plasseres i begge de to andre kategoriene. Modelleringskompetanse er kategorisert som «anvendelse», selv om det like mye handler om både forståelse og ferdighet.

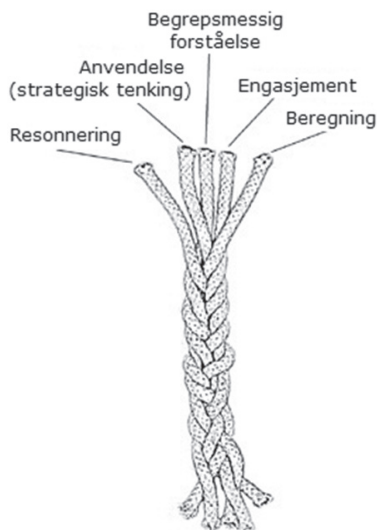
I KOM-prosjektet er en tydelig på at sentrale felt innenfor matematikklæring ikke er inkludert i kompetansebegrepet slik det er presentert i rapporten. Dette gjelder særlig holdninger til matematikk og affektive sider ved læringen. Kilpatrick m.fl. (2001) bruker begrepet *mathematical proficiency*, ikke *mathematical competence*. De inkluderer også holdninger til faget i sitt *proficiency*-begrep. De utvikler en modell som viser at delkompetansene henger tett sammen. De deler *proficiency* inn i fem komponenter eller tråder (*strands*) (oversettelsene er mine):

- Fleksibel tenking  
(*Adaptive Reasoning*)
- Strategisk kompetanse  
(*Strategic Competence*)
- Begrepsforståelse  
(*Conceptual Understanding*)
- Produktiv holdning  
(*Productive Disposition*)
- Prosedyrekunnskap  
(*Procedural Fluency*)

Sammenhengen mellom komponentene illustreres ved at de er flettet eller vevd sammen (figur 3.3).

Oppsummert er de fem delene beskrevet slik:

- Fleksibel tenking handler om evne<sup>7</sup> til å tenke logisk, reflektere, forklare og vurdere sannhetsverdien av en påstand, et argument eller et resultat.
- Strategisk kompetanse handler om evne til å formulere, representere, løse og vurdere løsningen av matematiske problem.
- Begrepsforståelse handler om evne til å forstå enkeltbegrep, operasjoner og sammenhenger mellom begrep i matematikk.
- Produktiv holdning handler å kunne se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifull.



Figur 3.3

- Prosedyrekunnskap handler om ferdighet i å gjennomføre prosedyrer fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig.

Også denne måten å se på matematisk kompetanse på er beskrevet og brukt av Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen i artikler og oppslag på nettet<sup>8</sup> blant annet i «Teoretisk bakgrunnsdokument for arbeid med regning på ungdomstrinnet» (Matematikksenteret, 2014). Her bruker en begrepet «matematisk kompetanse» når en oversetter *mathematical proficiency* til norsk.

### 3.3 Å være matematisk i et fellesskap

Kompetansebegrepet fra KOM-prosjektet og Kilpatricks *mathematical proficiency* fokuserer begge på enkeltelevne og deres evne, kunnskap eller kapabilitet i matematikk. Flere av delkompetansene eller trådene handler riktignok om elementer der samarbeid, kommunikasjon og samhandling er nødvendig når en arbeider med matematikk. Men fellesskapets rolle i læreprosessen og utvikling av kunnskap gjennom dialog blir i svært begrenset grad inkludert i kompetanse- eller proficiencybegrepet. Å være matematisk innenfor et fellesskap inkluderer noe mer enn bare som enkeltperson å ha evne, kunnskap og kapabilitet i matematikk.

For å få med fellesskapets betydning for elevene føyer Walshaw og Antony (2008) til seks områder, ikke nødvendigvis som delkompetanser eller tråder, men mer som områder som er viktige når en skal si noe om den overordnede kompetansen i matematikk. Disse områdene er:

- kulturell identitet og identitet som samfunnsborger (*citizenship*)
- tilhørighet til et fellesskap
- deltagelse i et fellesskap
- tilfredshet
- utforsking
- allmennmenneskelige verdier som respekt for andre, toleranse, rettferdighet, omsorg, flid, ikke-rasistisk oppførsel og uselviskhet

Gresalfi, Martin, Hand og Greeno (2009) fokuserer på elementer fra virksomhetsteori og utdyper hvorfor elever handler som de gjør, og hvordan en kan legge til rette for at elevene engasjerer seg i handlinger som kan føre til utvikling av læringsfellesskap og derved danne grunnlag for utvikling av kunnskap både for enkeltelevne og læringsfellesskapet. De inkluderer begreper som «sosiale normer» og hva som kjennetegner læringsmiljøer som stimulerer utvikling av kompetente matematikkelever. De viser hvordan kompetanse konstrueres sosialt, i modellen som er vist i figur 3.4.

Negotiation of	Participation structure	How an idea caters the common ground ( <i>i.e. standards of evidence</i> )	Leads to definition of	What students are accountable for
		Who is expected to author or critique mathematical ideas		Who students are accountable to
		Norms of argumentation ( <i>how students are encouraged to talk each other</i> )		
	Task as realized	Requirements for sensemaking		
		Openness of the task ( <i>opportunities to use different methods, find solutions</i> )		
		Requirements for successful completion		

Figur 3.4 «A model of how competence gets constructed in a classroom». Etter Gresalfi, Martin, Hand og Greeno (2009)

### 3.4 Å utvikle og delta i matematiske fellesskap

For å analysere og forstå hva som skjer i klasser som eksempelvis arbeider med opplegg som det som er beskrevet i begynnelsen av dette kapitlet, trenger en begreper som kan beskrive og forklare læringsfellesskap, hva som forårsaker at en får en sydende læringsaktivitet der alle deltar, hver på sine måter. Da er det ikke tilstrekkelig å bruke et kompetansebegrepet med fokus på enkeltindivid. Bruk av *mathematical proficiency* kan gi innsikt i elevenes holdninger og opplevelse knyttet til prosjektet og bidra til å forstå hvordan ulike tråder er flettet sammen hos den enkelte eleven. Men verken delkompetansene fra KOM-rapporten eller trådene i proficiency-begrepet kan brukes til å få innsikt i dialogen, samhandlingen og hvordan et opplegg kan bidra til å skape matematisk fellesskap der deltagelse og tilhørighet er avgjørende for den enkeltes bidrag og læring i prosjektet.

Betydningen av fellesskapet og elevenes deltagelse og tilhørighet kommer godt til syne i opplegget som ble presentert i begynnelsen av dette kapitlet. Elevene som deltok i opplegget «Svaret er 8 – hva er spørsmålet?», ble engasjert hver på sin måte. I starten var alle med på å utforske hvilke positive hele tall en kan addere slik at svaret blir 8. Da de gikk over til subtraksjon, valgte noen enkle oppgaver, mens andre valgte vanskelige oppgaver med store tall med kombinasjon av addisjon og subtraksjon.

Også da elevene ble utfordret til å lage ulike regnefortellinger, problemløsningsoppgaver eller spørsmål der svaret var 8, var det stor variasjon. Eva, Kemal, Elise og Sebastian laget alle spørsmål innenfor områder de enten var spesielt interessert i, eller som de kanskje hadde snakket med voksne hjemme om. Felles for alle disse spørsmålene var at de mest handlet om faktakunnskap, gjerne knyttet til



en quiz-konkurranse. Lise, Sasha og også mange andre elever lagde problemløsningsoppgaver som handlet om opplevelser de hadde hatt, eller om forhold nært knyttet til deres venner eller slektninger.

Når Jørgen fant tre brøker med ulike nevnerer som til sammen ble 8, uttrykte han stolthet, og han fikk stor anerkjennelse fra både lærer og medelever. Hans oppgave inspirerte medelever og ble modell for mange andre oppgaver som ble presentert i klassen. Når Silje foreslo en oppgave som nesten ingen forsto noe av, fikk hun likevel applaus fordi hun hadde funnet noe originalt og overraskende for hele klassen.

Opplegget ble mer enn en happening på siden av alt annet de holdt på med i matematikk. Det ble tett koblet til aktiviteter og oppgaver de arbeidet med i matematikk, blant annet ved at læreren krevde at oppgavene eller regnefortellingene skulle ha benevnelse eller være hentet fra matematiske temaer eller områder som for eksempel prosent, desimaltall, ligninger eller geometri.

Et viktig element i opplegget var at tekstene, oppgavene og fortellingene ble samlet og presentert på en egen tavle, gjerne også på et foreldremøte. Slik ble hele klassen delaktig i et produkt som de viste fram til andre, og som de kunne være stolte av. Oppgavene og matematikktekstene hadde elevene diskutert med hverandre på skolen og i fritida, noen av dem også med søsken, foreldre, besteforeldre eller andre under middagen og på ettermiddagen. På foreldremøtet gjenkjente flere av foreldrene oppgaver som var blitt til etter diskusjoner hjemme hos dem. Slik ble opplegget på mange måter hele lokalsamfunnets prosjekt.

## Noter

- 1 Utgangspunktet for dette opplegget er en idé til et opplegg opprinnelig gjennomført av den danske matematikdidaktikeren Viggo Hartz. Opplegget er gjennomført i flere klasser på ulike tidspunkt, og elevsvarene og andre resultater som er referert her, kommer fra flere forskjellige klasser.
- 2 Sleipner var en åttefotet hest i norrøn mytologi.
- 3 Spørsmålene ble laget i 2015, rett etter at Steven Gerrard sluttet som fotballspiller i Liverpool.
- 4 Rapporten er tilgjengelig på nettet på <http://pub.uvm.dk/2002/kom/hel.pdf>.
- 5 Fra 2007 ble de nasjonale prøvene knyttet til den grunnleggende ferdigheten «å kunne regne», og skiftet da navn til «Nasjonale prøver i regning».
- 6 Se for eksempel (<http://www.matematikkenteret.no/content.ap?thisId=635>), lastet ned oktober 2015.
- 7 Evne er her ikke knyttet til noen naturgitt evne, men mer forståelsen av ordet i uttrykk som «hun evnet å ...»
- 8 I sitt arbeid bruker de særlig et hefte av Kilpatrick og Swafford utgitt av National Research Council i 2002, der rapporten fra 2001 er noe forenklet og popularisert. (Kilpatrick og Swafford, 2002.)