FASIT OG TIPS til
Rinvold: Visuelle perspektiv. Tallteori.
Caspar forlag, 2004

Versjon 07.01.09.

Det er ikke tatt med svar på alle oppgaver. Denne fasiten vil bli oppdatert etter hvert. Oppdager du trykkfeil i boka eller feil i fasiten, så send en e-post til reinert.rinvold@hihm.no

TRYKKFEIL:

Side 17: Plasseringen av a i figurene har blitt feil. Det er hele sidene i kvadratet til venstre som har lengde a. Heltrukket vertikal linje til høyre i høyre figur har altså lengde a – b, ikke a. Det er figuren til venstre som svarer til $a^2 - b^2$ og den til høyre til (a + b) * (a – b). Figurene burde derfor vært byttet om.

Side 25: Overskriften "Mesopotamisk multiplikasjonsalgoritme" er misvisende og vil bli endret i neste utgave av boka. Det finnes andre bøker og kilder på nettet som også bruker betegnelsen, men eksperter på Babylonsk matematikkhistore, Jens Høyrup (Roskilde Universitet) og Ma Li (nå Høgskolen i Finnmark), sier at det ikke er noe belegg for at metoden ble brukt av babylonerne. De tror ikke på de kildene jeg benyttet meg av.

Side 25: Setningen under formel (2). Det skal være $a^2 - b^2$, ikke $a^2 + b^2$, slik det står.

Side 26: Formelen under (5). Det skal være $b = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)$. I boka står det feilaktig pluss i den siste parentesen.

Side 31: I eksempel 4.3, formelen for x2, skal det være 185, ikke 158.

Side 39: Det er feil i formel (7). På høyresiden er en n og en m byttet plass. Dessuten står skal det være 2 i stedet for det første av ettallene. Det skal være 10(10nm + 7m + 3n + 2) + 1

Side 43: Oppgave 6.4. Skal være det n-te kvadrattallet, IKKE trekant-tallet.

Side 44: Oppgave 6.5. Skal være det n-te kvadrattallet, IKKE trekant-tallet.

Side 50: Eksempel 7.3, etter (12) og ”Da er” begynner nummereringen med a_2, a_3 og a_4. Dette er imidlertid ikke andre, tredje og fjerde tall i følgen, men derimot første, andre og tredje. Det skulle altså vært $a_1 = 2 \cdot 10^1 + 3$, $a_2 = 2 \cdot 10^2 + 3$ og $a_3 = 2 \cdot 10^3 + 3$. Formelen (13) har samme type feil. Den skulle vært $a_n = 2 \cdot 10^n + 3$.

Side 53: Oppgave 7.5. Harmonisk følge er gitt ved 1, ½, 1/3, ¼, 1/5… Her har det falt ut ¼ i boka.

Side 84: I tabellen figur 9.1 er 51 ikke et primtall. Det er delelig med 3 og skulle hatt en strek over seg.

Side 85: Nesten nederst på siden: 2 * 3 * 7 = 43 (nytt primtall). Her skal det være 2 * 3 * 7 + 1 = 43.

Side 91: I den 3. linja med utregninger skal det stå: 258 = 1 * 231 + 27, ikke 17.

Side 103: Tredje tekstlinje nedenfra. Skal være ”…lineærkombinasjon av 5 og 7”, ikke 5 og 11.

Side 104: Første setning øverst på siden. Skal være at prisen er en lineærkombinasjon av 12 og 20, IKKE 20 og 30.

Side 121: Eksempel 12.7. ”Dermed kommer den 29. februar 3 ukedager etter 31. januar.” Det skal være 1. januar i stedet for 31. januar.

Side 121: Eksempel 12.8, formlene over og under ”Dermed får vi” er feil. Det skal være 1095/7 = 156,4 og ikke 1095/365. Under ”Dermed får vi” skal det være 1095 = 156 * 7 + 3.

Side 126: Det skal være 114 = 64 + 32 + 16 + 2, ikke 119 som det står. Neste formel på samme side har også en feil. Der skal det til høyre for andre likhetstegn fra venstre være $29^{64} \cdot 29^{32} \cdot 29^{16} \cdot 29^{2}$.

FASIT/LØSNINGSFORSLAG

KAPITTEL 2

2.4

a) $(a+1)^2$, b) $(a+3)^2$, c) $(3x+2y)^2$, e) $(3x-y)^2$, h) $(4a+5y)(4a-5y)$.

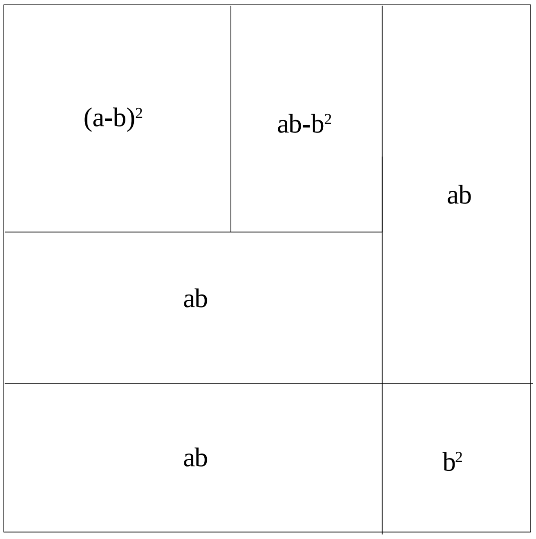
2.5

Algebraisk: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Husk geometrisk tolkning!

2.6 9, -9.

2.7 a) 2 og –7. b) 2 og -5.
2.8 a) 3 og –5, b) ingen løsning, c) 5 og -12

KAPITTEL 3



3.3

Det store kvadratet har areal $(a+b)^2$. Tar vi bort kvadratet med areal $(a-b)^2$, er det 3 rektangler med areal ab. Det siste rektanglet og det lille kvadratet kan settes sammen til et fjerde rektangel med areal ab.

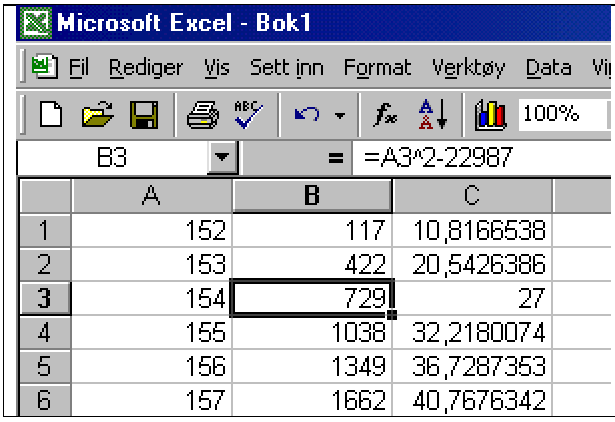
KAPITTEL 4

4.1 a) rot(2479) = 49,78… Prøver først med $50^2 - 2479 = 21$, og ser at det ikke er et kvadrattall. (Du kan gjøre det ved å sjekke om kvadratrota av tallet er et helt tall.) Heller ikke $51^2 - 2479 = 122$ er et kvadrattall,

men
$52^2 - 2479 = 225 = 15^2$. Derav er $2479 = (52 - 15)(52 + 15) = 37 * 67$.

Det er utmerket å bruke regneark eller grafisk kalkulator som hjelpemiddel. På kalkulatoren T1-83 trykker man på den blå knappen med "Y=". Der skriver man Y_1 = X^2 −2479. Hold nede gul "2nd"-tast og trykk på "TBLSET". Her velges "TblStart = 50". Hold igjen ned gul "2nd"-tast og trykk på "TABLE". Du får da opp en tabell.

b) rot(1891) = 43, 48… Første "suksess" er med x = 46 som svarer til y^2 =225 eller y = 15. Gir 1891 = (46-15)(46+15) = 31 * 61.



	A	B	C
1	152	117	10,8166538
2	153	422	20,5426386
3	154	729	27
4	155	1038	32,2180074
5	156	1349	36,7287353
6	157	1662	40,7676342

c) Her ser du regneark brukt til å løse oppgaven. Fant først

=rot(22987) = 151,61…

I rute B1 står formelen

= a1^2 −22987

I rute C1 står formelen = rot(b1).

4.3

Når en oppgave lages, går man ofte motsatt veg av løsningsprosessen. Multipliserer du to oddetall eller to partall nær hverandre, blir det en oppgave som løses ganske fort med Fermats metode. Et eksempel som raskt gir en løsning selv med stor avstand, er 44 * 102 = 4488. Her får vi nemlig allerede første forsøk at 67^2 – 4488 = 1. Altså er 4488 = 68 * 66. Det var imidlertid ikke de to tallene vi multipliserte! De får vi først med x = 73. Slikt kan skje når tallene som multipliseres ikke er primtall.

KAPITTEL 5

5.1

a) To partall kan vi se på som et visst antall par, la oss si n, som slås sammen med en annet antall par, la oss si m. Til sammen blir det n + m par. Algebraisk kan vi skrive det totale antallet som 2n + 2m = 2(n + m). Du kan også illustrere dette med byggeklosser eller med en figur.

5.2

b) Et oddetall er et tall som består av en samling par (kan være ingen, 0 par) og en til overs. Er det n par, så er oddetallet 2n + 1. Kvadratet av et slikt tall er lik arealet av et kvadrat med 2n + 1 enheter i hver retning (tegn figur). Hver rad består av n par og en til overs. Bortsett fra høyre kolonne dekkes derfor kvadratet av par. Høyre kolonne kan deles i n par og en til overs. Altså kan hele kvadratet deles inn i par bortsett fra 1 som blir til overs.

Algebraisk kan vi skrive dette:

$(2n + 1)(2n + 1) = 2n(2n+1) + 2n + 1 = 2(2n^2 + n) + 1$

Alternativt kan vi skrive $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + n) + 1$.

5.3 Vi så i forrige oppgave at kvadratet av et partall er et partall. Legges et partall til et partall, blir det et nytt partall. Derfor er summen av et partall og dets kvadrat et nytt partall: $(2n)^2 + 2n = 2(2n^2 + n)$. Tilsvarende er kvadratet av et oddetall et oddetall. Legges et oddetall sammen med et oddetall, får vi et partall. Derfor er også summen av et oddetall og dets kvadrat et partall.

5.4 Du bør eksperimentere litt. Du vil se at sistesiffer i kvadratet av et tall som slutter på 4, alltid blir 6. Et eksempel er 24 * 24 = 576. Du kan se fra den standard multiplikasjonsalgoritmen (metoden) at det siste sifferet i svaret kun påvirkes av de siste siffer i de to tallene som ganges sammen. Du kan også regne ut

$(10n + 4)^2 = 100n^2 + 80n + 16 = 10(10n^2 + 8n + 1) + 6$.

Et tall med siste siffer 4 (i titallsystemet) kan skrives som 10n + 1. Kvadreres dette med første kvadratsetning, kan vi se at svaret er 6 pluss et tall som er delelig med 10. Dette må derfor være et tall med sistesiffer 6.

Sammenhengen kan også illustreres med staver med lengde 10 og lengde 4. Tall med sistesiffer 4 svarer til et visst antall 10'erstaver og en firerstav. Bruker vi dette som rader i et kvadrat, får vi en geometrisk illustrasjon. Totalt blir det bare 10'erstaver bortsett fra de fire 4'erstavene. Disse svarer til en 10'er og en sekser.

5.5 Tallene har formen 5n + 2, dvs. de består av et visst antall grupper på 5 og 2 ”til overs”. Trekkes fire fra et slikt tall, blir en femmergruppe redusert til 1 ekstra ”til overs”. Da står vi igjen med femmergrupper og tre ”til overs”. Algebraisk $(5n + 2) - 4 = 5(n - 1) + 3$. Vi kan også si at tallet slutter på 2 eller 7.

5.6 To siste siffer blir 91. Algebraisk

$(100n +17) * (100m + 23) = 10000nm + 1700m + 2300n + 391 =$
$100 (100nm +17m + 23n + 3) + 91.$

Poenget er tall som slutter på 17 er et visst antall hundrere pluss 17. Tilsvarende for tall som slutter på 23. Ganges slike tall sammen blir det et visst antall hundrere pluss 91. Du kan se dette også ved hjelp av den standard multiplikasjonsalgoritmen.

5.8 Gjør noen talleksperimenter, prøv å regne ut kvadrater av en del tall som slutter på 5. Dette er en type eksperiment som egner seg godt i skolen! Du vil se at alle kvadratene slutter på 25. Tallet foran 25 får du ved en multiplikasjon. Prøv selv å finne ut hva du må gange sammen for eksempel for å få 6 i 625, kvadratet av 25. Dette er et mønster som trer tydelig frem ved å se på mange eksempler. En algebraisk begrunnelse kan finnes ved å regne ut kvadratet av $(10n + 5)$. Det skal bli 100 ganger et tall pluss 25. Tallet som 100 skal ganges med gir deg en formel for tallet foran 25, for eksempel blir dette tallet 6 når $n=2$.

5.10 Alle tall kan deles inn i grupper på 4 og en rest (de som er til overs). Tallene på formen $4n + 3$ er de som gir 3 til overs ved en slik inndeling. Alle tall er enten partall eller oddetall. Kvadreres et partall, blir svaret delelig med 4, altså kan det deles inn i grupper på 4 uten noen til overs. Kvadratet av et oddetall blir derimot et tall i firegangen og en til overs, se fasiten for 5.2b. Verken kvadratet av et oddetall eller kvadratet av et partall kan derfor deles inn i grupper på 4 og 3 til overs. Andre (positive hele) tall finnes ikke enn partall og oddetall.

KAPITTEL 6

6.2 Se (7.1) side 47 og lemma 6.1 side 45.

6.3 $T_4 = T_3 + 4$. $T_{n+1} = T_n + n +1$.

6.4 $K_5 = 25$, $K_{11} = 121$, $K_n = n^2$.

6.5 $K_4 = 9 + 7 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$. Det n-te kvadrattallet K_n er summen av de n første oddetallene. Dessuten: Vi kommer fra et kvadrattall til det neste ved å legge til oddetallet med nummer en mer enn nummeret til kvadrattallet vi tok utgangspunkt i. For eksempel får vi femte kvadrattall ved å legge sammen fjerde kvadrattall og femte oddetall.

6.6 Første skall har en prikk, oddetallet 1. Går vi fra et skall til det neste, får vi en ny prikk vertikalt og en ny prikk horisontalt. Til sammen har

derfor alle skall to prikker mer enn det forrige. Oddetallene er nettopp de tallene som består av et antall par og en ekstra. Hvis n er antallet par i et skall, blir antall prikker i skallet 2 * n + 1 = 2n + 1. Dette er skallet utenfor kvadrattallet n^2 likesom 2 * 1 + 1 er skallet utenfor kvadrattallet 1, 2 * 2 + 1 er skallet utenfor kvadrattallet 2^2 osv. Vi har derfor
$K_{n+1} = K_n + 2 * n + 1$.

Alternativt kan vi skrive $K_n = K_{n-1} + 2 * (n - 1) + 1$.

6.7 $K_5 = T_5 + T_4$.

6.8 Hint: Regneark eller tabellfunksjonen på grafisk kalkulator er velegnet til å utforske dette. Bruk formler for T_n og K_n.

6.9 Det dobbelte av summen er 100 * 101. Tenk på
1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98…

6.10 Kan tenke på to måter. Første tenkemåte er: Arbeider 1 må hilse på 11 andre. Arbeider 2 må hilse på 10 andre enn arbeider 1. Arbeider 3 må hilse på 9 andre enn 1 og 2. Fortsettes dette ser vi at totalt antall håndtrykk blir 11 + 10 + 9 + … + 3 + 2 + 1, altså summen av tallene fra 1 til 11. Ettallet svarer til at arbeider 11 hilser på arbeider 12.

Andre tenkemåte: Alle 12 arbeidere hilser på 11 andre. Det ser ut til å gi 12 * 11 håndtrykk. Imidlertid telles hvert håndtrykk to ganger. Et eksempel er at hilsningen mellom arbeider 5 og 7 både telles som at 5 hilser på 7 og som at 7 hilser på 5. Kanskje er det lettere å tenke på 12 fotballag som spiller en serie. Da blir antall kamper 12 * 11 hvis hvert lag møter hvert av de andre både på hjemme- og bortebane.

6.11 Hint: Summer tallene 51, 52, 53,…, 70 med tallene 70, 69, 68,…1 og ta halvparten. For fasit kan du bruke regneark til å summere tallene.

KAPITTEL 7

7.1 a) eksplisitt formel: $a_n = n + 2$. rekursiv formel: $a_{n+1} = a_n + 1$.

b) eksplisitt formel: $b_n = 10^n$. rekursiv formel: $b_{n+1} = 10 * b_n$.

c) eksplisitt formel: $c_n = 4n + 3$. rekursiv formel: $c_{n+1} = c_n + 4$.

d) eksplisitt formel: $d_n = 3 * 2^{n-1}$. rekursiv formel: $d_{n+1} = 2 * d_n$.

e) eksplisitt formel: $e_n = (-1)^{n+1}$. rekursiv formel: $e_{n+1} = (-1) * e_n$.

7.2 a) 10, 13, 16, 19, 22. Rekursiv formel: $a_{n+1} = a_n + 3$.

b) $b_n = 3n + 2$. (Velges en annen rekursiv formel som for eksempel $a_{n+1} = 2a_n - 3n - 4$, får vi en annen eksplisitt formel for b_n.)

7.3 Her er det lurt å begynne med a_{10} og så arbeide seg nedover til a_1. Får $a_1 = 85$. (Vi har da forutsatt at a_1 er det første tallet i følgen. Hvis a_0 er det første tallet, blir det annerledes.)

7.4 $L_1 = 10000 * 1,5$. rekursiv formel $L_{n+1} = 1,5 * L_n$. Finn eksplisitt selv.

7.5 Dette er et eksempel på at eksplisitt formel er lettere å finne enn rekursiv. Eksplisitt formel er $h_n = 1/n$. Rekursiv formel:
$h_{n+1} - h_n = 1/(n+1) - 1/n = -1/n(n+1)$. (mellomregning utelatt)
Derav $h_{n+1} = h_n - 1/n(n+1)$.

7.6 Fire første tall er 1, ½, ¼, 1/8. eksplisitt formel $a_n = 1/2^{n-1}$.

7.7 Har rot(4171) = 64,58… Har $66^2 - 65^2 = (65+1)^2 - 65^2 = 2*65 + 1 = 131$(etter bruk av første kvadratsetning og mellomregning). Neste økning er $2*66 + 1 = 133$. Starter med
$65^2 - 4171 = 54$, så blir $66^2 - 4171 = 54 + 131$, osv.

7.8 a) 3, 6, 9, 12, 15,…
b) 2, 4, 8, 16, 32,… c) 2, 2, 2, 2, 2,…

7.9 $a_n' = 2n+1$.

7.10 Hint: Hvis en følge er sin egen derivert, så er $a_2 - a_1 = a_1$. Det tilsier at: $a_2 = 2 * a_1$.

7.11 b) Lag først tallfølgen 1,2,3,4,… i kolonne A. I rute B1 skrives så = a1^3. Formelen kopieres så nedover.

7.12 I rute C1: =A1^2+3*A1+1, $b_n = n^2 + 3n + 1$.
Rekursiv: $b_{n+1} = b_n + 2n + 4$.

7.13 b) Brøkene nærmer seg 1,6180339… (en størrelse som kalles det gylne snitt). Startverdiene endrer ikke denne grenseverdien.
c) Prøver først med $(1,6180339)^n$. Korreksjonen (1/rot(5))* $(1,6180339)^n$ fungerer bra. (se også s 171 i boka)

7.14 rekursiv formel: $a_{n+1} = a_n + 6$. For å finne tall nr.10 i følgen begynner vi med startverdien 2 og legger til 6 ni ganger, dvs. $a_{10} = 2 + 9 * 6 = 56$. Glidelåsmetode. Får $a_2 - a_1 = 6$, og tilsvarende til $a_5 - a_4 = 6$, eller $a_n - a_{n-1} = 6$. Får $a_n - a_1 = 6 * (n-1)$. Omformet: $a_n = 6n - 4$. Kontroll $a_8 = 6*8 - 4 = 44$.

7.15 a) To neste tall: 51, 66. Rekursiv formel: $a_{n+1} = a_n + 2n + 3$. (Tallet foran n blir 2 siden økningen blir 2 større for hver gang. Tallet 3 er en korreksjon for å få starten til å bli riktig.)
b) Sum av tallene 5, 7, 9, 11, 13,… Prøv å legge til 13, 11, 9, 7, 5. Da blir summen 18 hver gang. Summen av disse 5 tallene blir $(5 + 13) * 5/2$. Generelt blir det $(5 + 2n + 3) * n/2$. Forenklet blir det $(n + 4) * n$.
c) Glidelåsmetode: Får $a_2 - a_1 = 5$, $a_3 - a_2 = 7$,og tilsvarende til $a_6 - a_5 = 13$, Får: $a_6 - a_1 = 5 + 7 + 9 + 11 + 13$, eller
$a_6 - a_1 = (5 + 4) * 5$. Generelt blir det
$a_n - a_1 = ((n-1) + 4) * (n-1) = (n+3) * (n-1)$. Vi kan omforme til $a_n = n^2 + 2n + 3$.

Alternativ glidelåsmetode:
$a_2 - a_1 = 5$
$a_3 - a_2 = 5 + 2 * 1$
$a_4 - a_3 = 5 + 2 * 2$
$a_5 - a_4 = 5 + 2 * 3$
$a_6 - a_5 = 5 + 2 * 4$
$\underline{a_7 - a_6 = 5 + 2 * 5}$
$a_7 - a_1 = 5 * 6 + 2 * T_5$.
$a_n - a_1 = 5 * (n-1) + 2 * T_{(n-2)}$. Bruk så formel for trekanttall, regn ut og trekk sammen.

7.16 a) Neste tall: 47, rekursiv formel $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$. b) Glidelås:
$a_2 - a_1 = 1$
$a_3 - a_2 = 3$
$a_4 - a_3 = 5$
$a_5 - a_4 = 7$
$\underline{a_6 - a_5 = 9}$
$a_6 - a_1 = K_5$.
$a_n - a_1 = K_{n-1} = (n-1)^2$.
Derav $a_n = n^2 - 2n +12$.

7.17 Har 1 + 67 = 2 + 66 = 3 + 65 = 68. Det blir 67 slike summer. Det dobbelte av svaret er derfor 67 * 68. Generelt blir alle slike summer (n+1) og det er n av dem. Summen av tallene fra 1 til n er derfor n(n+1)/2.

7.18 (2 + 2 * 17)*17/2 = 18 * 17 = 306, det dobbelte av summen av tallene fra 1 til 17. Generelt: n * (n+1).

7.19 (1+ (2*5-1)) * 5/2 = 10 * 5/2 = 25. Generelt
$(1+ (2*n-1)) * n/2 = n^2$.

7.20 $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$. $S_n = (2 + (3n -1)) * n/2 = (3n+1) *n/2$.
$b_n = 7n$. $S_n = 7n(n+1)/2$.

7.21 To neste tall: 84, 112. Rekursiv formel: $a_{n+1} = a_n + 4n +4$. Den deriverte følgen en aritmetisk følge med $a_1 = 8$ og $d = 4$. Summen av tallene i den deriverte følgen: $S_n = (2n + 6) * n$. Eksplisitt formel $a_n = a_1 + S_{n-1} = 4 + (2(n-1) + 6) * (n-1) = 2n^2 + 2n$. (Dette er egentlig fire ganger trekanttallene!)

7.22
$a_n = a_1 + d(n-1) = dn + (a_1 - d)$. $S_n = (a_1 + dn + (a_1 - d)) * n/2 = (dn + 2a_1 - d) * n/2$.

7.23 $S_n = 2 - 1/2^{n-1}$. Etter som n vokser, kan vi få summen så nær vi bare vil 2. Noen annen sum enn 2 er derfor uaktuell.

7.24 Etter 2 sekunder. Da har skilpadda løpt 10 meter og Akilles 20 meter.

7.25 I totallsystemet er 1 + 10 + 100 + 1000 = 1111_{to}. Legges 1 til dette tallet, får vi 10000_{to}. (toerovergang). Dette er $2^4 - 1$, summen av de fire første toerpotensene. Generelt, summen av de n første toerpotensene er $2^n - 1$. Et viktig poeng er at 1 er 2^0.

7.26 Figuren illustrerer at $1111_{to} + 1 = 10000_{to}$. Beviset er generelt fordi tilsvarende argumentasjon kan brukes uansett hvor mange toerpotenser som skal summeres.

7.27 Derivert følge har $d_n = 2^{n-1}$ som eksplisitt formel. $a_n = 5 + (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1} + 4$.

7.28 Generell sum $1 + k^2 + k^3 + \ldots + k^n = (k^{n+1} - 1)/(k-1)$.

7.29 Det visuelt/konkrete beviset fra 7.26 og dets generaliseringer gir (kan gi) innsikt i hvorfor summeformelen er som den er. Det er direkte sammenheng mellom formel og begrepsinnhold. Induksjonsbeviset er derimot basert på abstrakt hypotetisk tankegang. Vi antar at formelen er sann for n og vil vise at den er sann for n+1. Dette krever stødighet i variabelbegrepet. Dessuten møter student/elev tekniske algebraiske utfordringer som lett får fokus fremfor det som gir innsikt.

KAPITTEL 8

8.1 $F_3 = F_2 + 1 + 2 * 3$. $F_4 = F_3 + 1 + 3 * 3$. Antallet prikker øker med tre for hvert "lag". $F_{n+1} = F_n + 1 + n * 3$.

8.2 $S_6 = T_6 + 3 * T_5$. Eksplisitt formel: $S_n = 2n^2 - n$.

8.5 Hint for generell formel: $(k\text{-kanttall})_n = T_n + (k-3) * T_{n-1}$.

8.6 Har $E_n = T_n + n$. Eksplisitt formel: $E_n = n(n+3)/2$.

8.7 Har $H_n = K_n + T_{n-1}$. Eksplisitt formel: $E_n = n(3n - 1)/2$.

8.8 Har $B_n = K_n + 3*T_{n-1}$. Eksplisitt formel: $E_n = n(5n - 3)/2$.

KAPITTEL 9

9.1 (Krevende oppgave)

a) Hvis siste siffer er null, er tallet delelig med 10, og dermed også 5. Et slikt tall er jo en sum av tiere, hundrere, tusener osv. Tall som slutter på 5 er på formen 10n + 5, altså en sum av tall delelig med 5, med algebra: 10n + 5 = 5(2n +1). Tall som slutter på fem er en sum av en femmer og tiere, hundrere osv. Altså er de en sum av tall delelig med 5.

Hvis et tall ikke slutter på 0 eller 5, er det en sum av et tall delelig med ti (tiere, hundreder osv.) og et tall ikke delelig med 5. Tallet delelig med 10 kan deles i grupper på 5. Det som er til overs blir ikke en hel femmergruppe, så tallet som helhet kan ikke deles på 5.

9.2 Dette er en utfordrende oppgave! Sekstallsystemet ligner mest på titallsystemet av disse tre. Har 6 = 2 * 3. Dette er et produkt av 2 og et odde primtall likesom 2 * 5. Tall som slutter på 0 i dette systemet er delelige med 6 og dermed også med 3. Tallet 3 spiller altså en lignende rolle som 5 i vårt system. Sjutallsystemet er litt spesielt siden 7 er et primtall. Det er derfor ingenting som svarer til reglene for delelighet med 2 og 5 i titallsystemet. Eneste slike regel er at et tall i sjutallsystemet er delelig med 7 (10_{sju}) hvis (og bare hvis) det slutter på 0. Resten overlates til deg!

9.3 ABC, DHJ, GEI, NKL, MFO

9.4 a) 2|10. b) 3|30

9.5 a) 1, 2, 4 og 8. b) 1, 2, 4, 5, 10 og 20. c) 0.

d) Alle hele tall, fordi n * 0 = 0, uansett hva n er. e) Alle hele tall.

9.6 a) 5|75 og 5|35 medfører at: 5|(75 + 35). Med andre ord: Siden 5 går opp både i 75 og 35, går 5 også opp i summen av 75 og 35.

b) Mine ord: Hvis et tall d går opp i et annet tall (a), så går d også opp i alle tall (b) multiplisert med det andre tallet (a).

En konkretisering: Tenk deg at en buss inneholder en mengde mennesker som kan deles inn i grupper på d mennesker. Hvis det kommer flere busser med like mange mennesker som første buss, så vil også den totale mengden av mennesker i bussene kunne deles opp i grupper på d.

En visualisering kan lages som et rektangel hvor hver rad er delt opp i grupper på d ruter, staver med lengde d. For å tegne dette må vi velge et eksempel på d, for eksempel d = 3. Hele rektanglet kan da bygges av slike treerstaver.

9.7 7|7021. Begrunnelse: Har 7|7000 og 7|21 (sistnevnte fra gangetabellen!). Delelighetsreglene at 7| (7000 +21).

9.8 a) 3|300 og 3|6. b) Delelighetsregel ii) gir at 3|(300 −6). Siden 300 − 6 = 294, følger det derfor at 3|294.

c) Forslag: *På et matematikkstevne ble 300 mennesker fra en matematikkforening innkvartert på 3-mannsrom. Alle rommene som ble brukt var fulle. Så reiste 6 personer hjem. Disse var innkvartert på to rom.* Etterpå var det igjen 294 mennesker. Da var fortsatt alle (294) deltagerne fordelt på fulle tremannsrom. (Dette hadde fungert selv om de som reiste hjem ikke var fordelt på to rom. I motsatt fall måtte det skjedd noen bytter av rom for at de 294 skulle vært fordelt på fulle tremannsrom.)

9.9 a) Har at 97 = 70 + 27 = 70 + 21 + 6. Da er 97 skrevet som tall i sjugangen pluss et tall mindre enn sju. Altså er resten 6. Med divisjonslemmaet blir det: 97 = 13 * 7 + 6. (Brukte at 10 + 3 = 13.) Har a = 97, b = 7, t = 13 og r = 6.

b) 97/7 = (13*7 +6)/7 = 13 6/7.

c) Differansen 97 – 90 er delelig med 7. Da har de samme rest ved divisjon med 7. Tenker vi oss 97 delt inn i grupper på 7 og de som er ”til overs”, må en hel 7’ergruppe dra sin veg for å få 90. Dermed blir antallet ”til overs” det samme som før.

Generelt: Hvis 7|(a - b), så har a og b samme rest ved divisjon med 7.

Har 716 - 16 = 700, som er delelig med 7. Derfor har 716 samme rest ved divisjon med 7 som 16. Siden 16 = 2 * 7 + 2, blir resten 2.

9.10 a) 5 = 0 * 10 + 5. Resten er altså 5. Her: a=5, t =0, b=10 og r = 5.

b) Når b = 0, ville divisjonslemmaet si at a = t * 0 + r, der r er et ikke-negativt tall mindre enn 0. Det er selvsagt umulig. Legg imidlertid merke til at divisjonslemmaet gjelder når b = 1. Da er r = 0.

9.11 Hvis et tall d som går opp i et tall n ikke er et primtall, er d et produkt av to mindre tall større enn 1. Hvis for eksempel d =15 går opp i n, så vil et mindre tall også gå opp i n. Vi har 15 = 3 * 5, så også 3 og 5 går opp i n. De mindre tallene (større enn 1) som går opp i d, vil altså også gå opp i n. Det minste tallet som går opp i n må derfor være et primtall, siden det motsatte er umulig. (Det motsatte av et primtall er et tall som kan faktoriseres i to mindre tall.)

9.12 (Krevende oppgave) Tallet 2 * 3 + 1 = 7 er helt sikkert ikke delelig med verken 2 eller 3. Hvis for eksempel 7 = 2n, ville 2(n-3) = 1. Det er naturligvis ikke mulig når n er et helt tall. Helt tilsvarende er 2 * 3 * 4 + 1 = 25 ikke delelig verken med 2, 3 eller 4. Heller ikke 2 *3 * 4 * 5 + 1 = 121 er delelig med 2, 3, 4 eller 5. Også da ville delighetsregel ii) gi at 1 var delelig med et tall større enn 1. I det siste tilfellet, må 121 være delelig med et tall større enn 5.

Fra oppgave 9.11 vet vi at det minste tallet som går opp i 121 er et primtall. Alle tall er i hvert fall delelige med seg selv, så det finnes et primtall større enn 5. I dette tilfellet er 11 det minste tall som går opp i 121. Helt tilsvarende kan vi fortsette, å for eksempel få at
2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 * 11 + 1 = 39 916 801 er delelig med et primtall større enn 11. Dette tallet er faktisk selv et primtall. Det viser

at dette ikke er en praktisk måte å finne det minste primtallet større enn 11 på!

9.13 a) 5 b) 10 c) 3/5.

9.14

i) Et primtall er innbyrdes primisk med alle mindre positive hele tall.

ii) Alle positive hele tall er innbyrdes primiske med 1.

iii) Bare tallet 1.

9.15 Hvis et tall går opp i to nabotall, så går tallet også opp i differansen mellom nabotallene, altså 1. Eneste tall som går opp i 1 er tallet 1. Altså har nabotallene 1 som største felles divisor. Euklids bevis for eksistensen av uendelig mange primtall bruker at nabotallet til et produkt av (prim)tall er innbyrdes primisk ikke bare med tallet, men med dets faktorer.

KAPITTEL 10

10.1 a) 7, b) 6, c) 1, d) 2, e) 1, f) 1.

10.2 Du kan få fasit ved å gå til websiden
http://www.math.umn.edu/~garrett/js/gcd.html

10.3 Websiden nevnt ovenfor kan brukes bare indirekte. a) 3, b) 12. For å finne (a, b, c), største felles divisor av tre tall, kan du først finne (a, b). For (201,1139,335) gir det (201,1139) = 67. Så finnes svaret som (67,335) = 67.

10.5 Eksempel: a = 40, b =140.

10.6 a) 3, b) 1, c) 2

10.7 a) 60, b) 8, c) 0, d) 24225.

10.8 Det går 24 dager. (minste felles multiplum av 6 og 8)

10.9 Merk først at i tankeeksperimentet er $r>0$ fordi m antas ikke å gå opp i ab. Men $r = 12 * 15 - t * m$. Derav må både 12 og 15 gå opp i r, som derav må være et felles multiplum for de to tallene. Men m var antatt å være den minste felles multiplumet og $r < m$. Det er en selvmotsigelse.

KAPITTEL 11

11.1 a) 37 = 5 * 2 + 9 * 3 = 2 * 2 + 11 * 3 = osv. Kan du finne alle mulighetene?

11.4 Regneark kan være en hjelp. En ide er også å sette opp tallene i sjugangen og tallene i ellevegangen. 60 = 7*7 + 1*11, 61 = 4*7+3*11.

11.7 a) x = -7, y = -8. b) x = 237 ,y = -316. c) x =100, y = -70. Løsningene ble funnet av Thoralf med utvidet Euklidsk algoritme, se http://www.thoralf.uwaterloo.ca/htdocs/linear.html Der kan du også finne løsningsforslag, dog med få mellomregninger.

11.9 Svarer til y = (25/7)x – 1/7, altså positivt stigningstall. En løsning er et punkt (x, y) på denne linja med x og y hele tall. Hver gang vi øker x med 7, øker vi y med 25. En slik økning fører oss altså fra en heltallig løsning til en ny. Bare vi gjentar det mange nok ganger, vil tilslutt både x og y bli positive.

11.10 Må ha (a,b)|c for å ha minst en løsning. Må ha at a og b har motsatt fortegn (stigningstallet –a/b>0) for å få uendelig mange løsninger hvor både x og y er positive hele tall.

11.11 Dette egner seg utmerket for regneark eller tabellfunksjonen til grafiske kalkulatorer.

KAPITTEL 12

12.1 a) 37 $\equiv$ 69 (mod 8) b) 156 $\equiv$ 0 (mod 12) c) 200 $\equiv$ 2 (mod 99)

d) 16 $\equiv$ 2 (mod 7) f) 3 $\equiv$ -9 (mod 12) g) 4 $\equiv$ 16 (mod 12)

h) 356 $\equiv$ 126 (mod 10) i) 4791 $\equiv$ 591 (mod 100) k) 15 $\equiv$ 1 (mod 2)

12.2 a) **-**50 $\equiv$ 350 (mod 400) b) 1500 $\equiv$ 300 $\equiv$ -100(mod 400).

12.3 a) 47 b) 42 c) 325

12.4 17 $\equiv$ 2 (mod 3), så midtkøye.

12.5 a kongruent b (mod 1) er ekvivalent med at 1|a-b. Dette holder for alle a og b som er hele tall.

12.7 5000 : 60 er lik 83 pluss 20 i rest. Det har gått 83 minutter og 20 sekunder, så de to sifrene viser 20.

12.8
a) En strategi for denne oppgaven er først å finne ukedagen for 17/5 i et kjent år, for eksempel 2004. Det var en mandag. Så regnes det ut hvor mange år det er tilbake til 17/5 1814. Så finner du ut hvor mange av disse årene som var skuddår. Deretter finnes resten når summen av antall vanlige år og det dobbelte av antall skuddår deles med 7. Dermed har du hvor mange dager frem det blir i forhold til en mandag. Fasit: tirsdag.

b) Husk at år 2000 var skuddår. Siden 1.1.2004 var en torsdag, må fasiten bli lørdag.

c) Blir en onsdag.

12.11
a) 37^{50} : 13, rest 4
b) 9^{37} : 5, rest 4
c) 25^{67} : 7, rest 4
d) 23^{86} : 13, rest 9
e) 2^{64} :7, rest 2
f) 3^{100} : 5, rest 1

12.12 a) 9 b) 4 c) 4

12.15

a) *x* kongruent med 2 modulo 3.
b) *x* kongruent med 2 modulo 3.
c) *x* kongruent med 2 modulo 7

12.17
Har at *n* er kongruent med T(n) (mod 3). Vi kan altså begrunne på tilsvarende måte som for delighet med 9.

12.18

Har at $a = a(k)10^k + ... + a(1)10 + a(0)$ er kongruent
$a(0) - a(1) + a(2) - ... +a(k)(-1)^k$ (mod 11)

12.19
Tallet 1001 kan faktoriseres som 7 * 11 * 13. Derav er 1000 kongruent med -1 modulo 7. Vi kan derfor dele et tall inn i grupper på tre og tre siffer regnet bakfra og ta en alternerende "tverrsum". F.eks. er 123 456 kongruent med 456 - 123 modulo 7. Tilsvarende kunne vi gjort for delelighet med 11 og 13. Ellers kunne vi lage en mer komplisert "tverrsum" ved at 10 kongruent med 3 modulo 7, 100 kongruent med 2 modulo 7, 1000 kongruent med 4 modulo 7 etc. Se forøvrig oppg. 12.32.

12.20
Ved delelighet med 4 er poenget at 1000 og 100 er kongruent med 0 modul0 4. Et tall er derfor delelig med 4 hvis og bare hvis de to siste sifrene er delelige med 4. Eventuelt kan du også bruke at 10 kongruent med 2 modulo 8. Da er f.eks. 6792 kongruent med 9*2+2 = 20 modulo 4. Altså er tallet delelig med 4.

Delelighet med 8. La: a = a(k)10^k + ... + a(1)10 + a(0). Siden 8|1000, er a kongruent med 4 * a(2) + 2 * a(1) + a(0) (mod 8).
Vi trenger altså bare å sjekke at tallet dannet av de tre siste sifre er delelig med 8.

Delelighet med 10: a er kongruent a(0) (mod 10).
Dette inntreffer når siste siffer er null!

Delelighet med 20: a er kongruent 10 * a(1) + a(0) (mod 20)
Det betyr at siste siffer må være null og nest siste siffer må være et partall!

Delelighet med 25: a er kongruent 10 * a(1) + a(0) (mod 25)
Det betyr at siste siffer må være 00, 25, 50 eller 75.

12.22 a) Stykket er feil regnet. b) sifferet er 6.

12.25
Eksempler: Hvis man får 3 * 4 = 21 eller 21 * 2 = 51, vil ikke testen oppdage feilen.

12.28 Skal avgjøre om $2^{32}+1$ er delelig med 641. Regner ut hva $2^{32} + 1$ er modulo 641:

2^{16} = 65536, som er kongruent med 154(mod 641), da
65536=102 · 641+154.

Regn så ut 154^2, basert på at $2^{32} =(2^{16})^2$, og finn resten ved divisjon med 641. Dette blir 640.

Dermed blir $2^{32} + 1$ kongruent med 640 + 1, som er kongruent 0 modulo 641. Dermed vet vi at 641 går opp i F_5.

12.29

a) 9,7,3,6,1,2,4,8,5,10.
b) Det er 10 tall i perioden. Et tall er med bare en gang i hver periode.
c) Siden vi starter med et tall som ikke er et multiplum av 11 og vi multipliserer med 2 som er innbyrdes primisk med 11, er det utelukket å få 0 i rest. Altså er det høyst 10 forskjellige mulige rester og perioden kan høyst ha lengde 10. En gjentagelse i sekvensen svarer til at vi har tall *n*

og *k* slik at $2^n \cdot 9 = 9+11k$, eller med andre ord $(2^n -1) \cdot 9 = 11k$. Det er lett å sjekke ved utregning at det minste tallet n større enn 0 slik at $(2^n - 1)$ er delelig med 11, er n=10.

12.33 Regelen med tverrsum for delelighet med 9 kommer av at 9 er en mindre enn "basen" i titallsystemet. Vi har 11 kongruent med 1 modulo 10 og derav er alle potenser av 11 kongruente med 1 modulo 10. Et tall er derfor delelig med 10 hvis og bare hvis tverrsummen i ellevetallsystemet er delelig med 10. Vi har tilsvarende tverrsumregler for delighet med 5 og 2, faktorene til 10. (Dette svarer til at 3 er en faktor i 9.)

12.34 RUMMUNQS

12.35 Vi må velge en multiplikator som er innbyrdes primisk med 26. I motsatt fall vil det finnes to eller flere bokstaver som kodes likt. Dessuten vil det finnes bokstaver som ikke koder noen bokstav.

12.41

a) 5 b) 8 c) ingen løsning d) 3 modulo 11. Modulo 22 er både 3 og 14 løsninger. e) 4 f) 7

Løsning av a):

1: $3x \equiv 7 \pmod 8$
2: $3x \equiv 7+8 \pmod 8$

Ideen er å få et tall delelig med 3 på høyre side. Åtte er kongruent null!

3: $3x \equiv 15 \pmod 8$ Trekker sammen.
4: $x \equiv 5 \pmod 8$

Deler med 5 på begge sider. Lovlig da 5 og 8 er innbyrdes primiske.

12.43 a) TGBAG b) NØTT (Var dette en nøtt?)

KAPITTEL 13

13.1 (11,60,61)

13.2
a) $2n^2+2n$ og $2n^2+2n+1$ er innbyrdes primske fordi de er nabotall (differanse lik 1).

b) Triplene er primitive hvis n er et partall. Da vil $n^2 +1$ og n^2-1 være to oddetall med 2 som differanse. Hvis k er en felles faktor for disse to tallene, må den felles faktoren også gå opp i differansen som er 2. Siden ingen av tallene er delelige med 2, må k være 1. Hvis n er et oddetall, vil trippelet ha 2 som felles faktor.

c) Triplene (9,12,15), (15,36,39), osv. oppfyller kravet. Ingen primitive tripler som oppfyller kravet.

13.3
Hvis d er et tall som går opp i både u og v, så må d gå opp i både u^2 og v^2. Derfor vil d gå opp i både 2uv, $u^2 - v^2$ og $u^2 + v^2$. Dermed er d en felles faktor for trippelet, så d = 1.

13.4
Trippelet fra ligning (14) får vi ved å sette u=n+1 og v=n. Dermed er u og v innbyrdes primiske. Trippelet fra 13.2b) fås ved u=n, v=1. Fra oppg.13.3 ser vi at et nødvendig krav for å få primitive tripler er at u og v er innbyrdes primiske. Det er automatisk oppfylt når v=1. Imidlertid er dette ikke tilstrekkelig at u og v skal være imbyrdes primiske for å få et primitivt trippel. I tillegg kan ikke begge være odde eller begge partall. Det tilfredstilles derimot av n+1 og n.

13.7
Må finne u og v, u > v slik at $u^2 + v^2 = 1105$ for å få primitivt trippel med hypotenus 1105. Prøver om $1105 - u^2$ er kvadrattall fra u = 24 og oppover. Grunnen er at $\sqrt{1105/2} \approx 23{,}5$. Får suksess for u =24, u = 31, u = 32 og u = 33. Det gir triplene (1104, 47, 1105), (744, 817, 1105), (576, 943, 1105) og (264, 1073, 1105). Det finnes flere ikke-primitive tripler. Vi har 1105 = 5 * 13 * 17. Vi kan lete etter primitive tripler for alle divisorer til 1105. En slik er 5, hvor (3, 4, 5) er et primitivt trippel. Vi ganger opp med 13*17 = 221 og får trippelet (663, 884, 1105).

13.8
Den største trekanten har sider (72, 65, 97) og den minste (56, 33, 65). Du må løse de diofantiske ligningene $u^2 + v^2 = 65$ (hypotenus) og $u^2 - v^2 = 65$ (katet). Leddet 2uv er uaktuelt fordi den kjente kateten er et oddetall. Fordi $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v) = 65 = 15 * 5$, må u+v = 13 og u-v=5. Det gir u = 9 og v = 4. (Løsningen basert på 65 = 65 * 1 utelukkes fordi det gir en side større enn 100.) For $u^2 + v^2 = 65$ finnes løsningen ved systematisk leting ved å sjekke om $65 - u^2$ er et kvadrattall. Løsningen u = 8, v = 1 er utelukket fordi det gir en side som er kortere enn 20. Det som gir riktig løsning er u = 7, v = 4.

13.9

a) oddetall er på formen 2m+1, så $(2m+1)^2=4(m^2+m)+1$, som er på formen 4n+1.

b) $(2k+1)^2 +(2n+1)^2 = 4(k^2+k+n^2+n)+2=4m+2$ med $m=k^2 +k+n^2+n$.

13.10 (vanskelig)

z=(z+y)/2+ (z-y)/2 og y=(z+y)/2- (z-y)/2, så hvis d går opp i begge brøkene, vil d være en felles faktor for z og y. Hvis z og y er innbyrdes primiske, så kan altså heller ikke brøkene ha en felles faktor større enn 1.

13.11 (svært vanskelig)

Ved å sette inn å sammenligne v.s og h.s finner vi at $x^2+y^2=z^2$. Hvis u og v er innbyrdes primiske, så følger det fra aritmetikkens fundamentalteorem at også u^2 og v^2 er innbyrdes primiske. Hvis p er et primtall som går opp i både u^2+v^2 og u^2-v^2, så må p gå opp i $(u^2+v^2)+(u^2-v^2)=2u^2$ og $(u^2+v^2)-(u^2-v^2)=2v^2$. Da gir aritmetikkens fundamentalsats at enten p=2 eller så er p en felles faktor for u og v. Det siste er umulig siden u og v er innbyrdes primiske. Siden ikke både u og v er odde eller både u og v er partall, kan imidlertid heller ikke p være 2. Det som gjenstår da er at u^2+v^2 og u^2-v^2 er innbyrdes primiske. Dermed er også trippelet primitivt.

13.12 (x,y)=(2,3),(12,17),(70,99).

KAPITTEL 14

14.1 Formelen ses fra en arealbetraktning. Venstre side summerer arealene til kvadratene. Høyre side er arealet av rektanglet som lengde ganger bredde.

14.5 a) 1/12 b) 3/7 c) 3/77 d) Skriv brøkene med samme minst mulige nevner. Finn største felles divisor av de to tellerne og del på fellesnevner.

14.10 Bruker at $f_{n-1}=f_{n+1} - f_n$: $f_0= f_2 - f_1 = 1 - 1 = 0$. Videre $f_{-1} = f_1- f_0 =1 - 0 = 1$. Så $f_{-2} = f_0 - f_{-1} = 0 - 1 =-1$. Det viser seg at vi får fibonaccitallene på nytt bortsett fra at fortegnet varierer. Det blir $f_{-n} = (-1)^{n+1} * f_n$.

14.11 Bevis: m|n gir at (m,n) =m. Fra oppg.14.9 får vi $(f_m,f_n)=f_{(m,n)} = f_m$. Dermed må $f_m \mid f_n$.

14.14 Har at $f_1 + f_2 + f_3 +\dots + f_n = f_{n+2} - 1$.

KAPITTEL 15

15.5 Primtallene kommer med unntak av første rad, kun i 1. og 5.kolonne, dvs. at de er tall som er 1 mer eller mindre enn et tall i 6-gangen, dvs. på formen 6n+1 eller 6n-1. (OBS: Det er på ingen måte slik at alle tallene i disse kolonnene er primtall!) Årsaken til dette er at alle tall i kolonne 2 og 4 og 6 er delelige med 2, de er på form 6n+2, 6n+4 og 6n+6. Tallene i kolonne 3 er delelige med 3, de er på form 6n+3.

KAPITTEL 16

16.1

a) $a=49000=2^3 * 5^3 * 7^2$, b) $=47600= 2^4 * 5^2 * 7 * 17$

b) $(a,b) = 2^3 * 5^2 * 7$, $[a,b] = 2^4 * 5^3 * 7^2 * 17$

c) $s=2^4 * 5^4 * 7^2= 490\ 000$ d) $k=2^3 * 5^3 * 7^3= 343\ 000$

16.2 Hvis tredjeroten av 11 er rasjonal, er dette en brøk m/n, der m og n er positive hele tall. Da er $t = 11 * n^3 = m^3$ et naturlig tall. Entydig primtallsfaktorisering gir at 11|m og dermed at eksponenten til 11 i standardformen til t er delelig med 3. Imidlertid må også n være delelig med 3, så venstresiden gir at eksponenten til t i standardformen er 1 større enn et tall delelig med 3. Dette er en selvmotsigelse, så antagelsen om at tredjeroten av 11 er rasjonal, må være feil, dvs. at den er irrasjonal.

16.3

(135,30) * [135,30]=135 * 30. Generelt gjelder også
(a,b) * [a,b] = a * b. Hvis vi tenker oss at a og b er på standardform og vi skal danne (a,b) og [a,b], ser vi at for hvert primtall som forekommer i a eller b, så går den minste eksponenten til (a,b) og den største eksponenten til [a,b]. Produktet (a,b) * [a,b] får derfor med seg nøyaktig de primtallspotensene som forekommer i standardformen til ab. Største felles divisor og minste felles multiplum dannes altså ved å samle primtallspotensene med de laveste eksponentene for seg og de høyeste for seg.

16.4 Hvis p|abc, så vil ifølge 16.1 enten p|ab eller p|c. Ved å bruke 16.1 en gang til på p|ab, får vi at p|a eller p|b eller p|c.

16.5 $M_5 * 2^{5-1} = 31 * 2^4 = 496$.

16.6 Sigmafunksjonen tar med også tallet selv som divisor, derfor a+b i stedet for a og b som i definisjonen av vennskapstall basert på ekte divisorer. At sigma(a) = sigma(b) ikke er tilstrekkelig, ser vi f.eks. ved å velge a=6 og b=11.

16.7

sigma (220) = sigma (2^2 * 5 * 11) =
sigma(2^2) * sigma(5) * sigma (11) = 7 * 6 * 12 = 504 = 220+284 og

sigma (284) = sigma(2^2 * 71) = sigma(2^2) * sigma (71) = 7 * 72= 504 = 220+284.