FASIT OG TIPS til
Rinvold: Visuelle perspektiv.
Avbildninger og symmetri.
Caspar forlag, 2.opplag 2004

Versjon 07.01.09.

Boka er en begrenset revisjon av 1. utgaven fra 2004. Det er ikke tatt med svar på alle oppgaver. Fasiten og trykkfeillista vil ikke bli oppdatert, da det trykkes en revidert utgave av boka i midten av januar 2009. Si likevel fra ved å sende e-post til reinert.rinvold@hihm.no dersom det oppdages feil eller mangler i fasiten. Fasiten til den nye utgaven vil nemlig bli oppdatert, og oppgavenummer blir som før. Det er også mulig å melde om omdagede trykkfeil, men merk at feilene i lista under og noen til er rettet i 2009-utgaven.

TRYKKFEIL

Side 12 I raden rett over 1.6 skal det være ”til høyre”, ikke ”til venstre.

Side 24 Eksempel 1.16.1. Det skal være
OM = ½(**OA + OB**) = ½([-1,-1] + [2,2]) = …
Det står feilaktig ½([-1,-1] + [2,-2]) i boka.

Side 34 Oppgave 2.6. Ordet ”til” forekommer to ganger.

Side 40 Oppgave 2.9 b). ”Begrunn med…”, ikke ”begrunn at med…”

Side 47 Litt over oppgave 2.15. Skal være ”standardform”, mangler ’d’.

Side 48 Hint, midt på siden, ”kall hjørnene A, B og C”, ikke ”kall sidene…”

Side 66 Oppgave 3.4 a), skal være ”parameterfremstilling”, mangler ’m’.

Side 91 Siste ord i setningen rett over eksempel 4.8.1. Det skal være standardform, ikke normalform.

FASIT/LØSNINGSFORSLAG

KAPITTEL 1

1.3 a) **AB = DC = -CD** og **AD = BC**. b) Vektorene **AB** og **CD** er parallelle med L. (vektor og linje har samme stigningstall)

1.5 a) **OQ – OP = PQ**. b) **RS** = (1/2)**PQ**. Det har med formlike trekanter å gjøre. Når S deler OQ i samme forhold som R deler OP, så er RS og PQ parallelle. Ikke bare det, men SR står i samme forhold til QP som QS til QO.

1.7 Her er det trykkfeil! Punktet D skal være (10,2). Har da at
CD = (7/4) **AB**, dvs. r = 7/4. Tilsvarende er s = -7/4 og t = 4/7.

1.8 **AB** = [6,7], **OM = OA** + (1/2)**AB** = [2, 6.5]. Uten vektorregning kan vi innføre punktet C(5,3) slik at ACB blir en rettvinklet trekant. Midtnormalene til de to katetene vil begge skjære midtpunktet M til hypotenusen AB. Førstekoordinaten til M vil ligge midt mellom førstekoordinatene til A og C. Tilsvarende for andrekoordinatene til M og C og B.

1.9 **OS = OA +** (2/3) **AB** = **OA +**(2/3)(**OB –OA**) = (1/3)**OA** + (2/3)**OB**. Det siste svaret er mest elegant! Kan du generalisere dette? Svaret **OA +** (2/3) **AB** er også riktig, men er en litt mer tungvint formel.

1.10 a) Medianene skjærer hverandre i ett punkt.

b) Hvis vi setter A = 0 (origo) i formelen nederst side 18 i boka, så blir **OA** nullvektoren og **OT** blir **AT**. Grunnen til at vi kan gjøre dette er at formelen for tyngdepunkt gjelder uansett hvor origo er. Tyngdepunktformelen er ikke avhengig av koordinater. (Alternativt kan du tenkte deg at hele trekanten parallellforskyves til origo med vektoren **AO**. Du får da en trekant OB'C' med et tyngdepunkt T'. De merkede punktene fås fra de umerkede ved å parallellforskyve med **AO**.)

c) Merk at M er midtpunktet til AD. (Uklart oppgaven.) Har **AM** = (1/2) **AD** = (1/2) (**AB + BD**) = (1/2)**AB** +(1/2)**BD** = (1/2)**AB** + (1/2)**AC**. Dette sammenlignes med **AT** = (1/3)**AB** + (1/3)**AC**. Vi ser da at (3/2)**AT** = **AM**. Når AM deles i tre like store deler, vil derfor AT utgjøre 2 deler og TM en del.

d) Dette er helt tilsvarende b. Det er bare snakk om å bytte om bokstavene.

e) Arealet av en trekant kan beregnes ved formelen ½ gh, hvor g er grunnlinje og h høyden. Det vil si at g er lengden til den ene siden i trekanten og at h er lengden av normalen fra motstående hjørne på denne siden. Ser vi på medianen CM fra C på AB i en trekant ABC, så vil normalen fra C på AB være høyde både i trekanten AMC og trekanten MBC. Dette gjelder selv om den ene høyden treffer forlengelsen av grunnlinjen utenfor trekanten. Begge de to sistnevnte trekantene har halve grunnlinjen i trekanten ABC som høyde. Altså har hver av dem halvparten av arealet til trekanten ABC.

1.11 Tyngdepunktformel for en rett linje: **OT** = (1/2)**OA** + (1/2)**OB**.

En trekant: **OT** = (1/3)**OA** + (1/3)**OB** + (1/3)**OC**.

et tetraeder: **OT** = (1/4)**OA** + (1/4)**OB** + (1/4)**OC** + (1/4)**OD**.

Det er en del jobb, men vi kan regne ut at T blir punktet hvor medianene i tetraederet skjærer hverandre. En median i et tetraeder er en forbindelseslinje mellom et hjørne og tyngdepunktet til motstående flate. For å vise at det svarer til det fysiske tyngdepunktet i et tetraeder med samme massetetthet overalt, må vi bruke integrasjonsregning. Det er ikke pensum i dette kurset.

1.12 Anta r og s> 0. Hvis vi forflytter oss r ganger så langt som vektoren **a** og deretter s ganger så langt som vektoren **a**, så forflytter vi oss totalt r + s ganger vektoren **a**. Når r = 0, svarer det til å forholde seg i ro. Vi kan si at regneregelen uttrykker vanlig addisjon på en tallinje parallell med **a** og med **a** som enhet. Tenker vi på den måten, ser vi at regelen også gjelder når r og s er negative tall eller 0.

1.13 Vi kan si at denne regelen uttrykker lineærforhold mellom formlike trekanter. Tegnes **a** og **a + b** med felles startpunkt og **b** med startpunkt i endepunktet til **a**, så dannes en trekant. Når r>0, vil r**a** og r**b** være sidene i en formlik trekant. Den tredje siden vil ut fra formlikhet være r(**a+b**) og ut fra vektoraddisjon være r**a** + r**b**. Når r er negativ, har vi samme trekant, men vektorene peker motsatt veg.

1.14 Denne regelen kan som S1, knyttes til en tallinje parallell med vektoren **a** og med **a** som enhet. r *s slike enheter er det samme som r enheter som hver består av s**a**. Vi kan si at regelen forteller hva som skjer når vi skifter enhet på en slik tallinje.

Er s negativ, så vil den nye enheten s**a** ha motsatt retning av **a** og være –s ganger så lang. Er r>0 vil r(s**a**) si å gjenta denne retningsvektoren r ganger. Det må være en like lang vektor som å gjenta r*(-s) ganger vektoren **a**, men retningen blir motsatt. Er r<0, så vil r(s**a**) si å gjenta –r ganger retningsvektoren s**a** og så ta den motsatte vektoren (snu den 180 grader). Da har vi snudd to ganger, så retningen er den samme som **a**. Vi har (-r)(-s) slike **a**’er, dvs. (rs)**a**.

1.16 **P =** [2,3], **PQ** = [1,2], **PP** = [0,0].

1.17 a) **OM** = [1,3/2] b) [11/3, 10/3].

1.18 Regelen K2 uttrykker at å bevege seg et visst antall kilometer øst, så et visst antall kilometer nord, så et annet antall kilometer øst og et antall kilometer nord, kan erstattes ved først å bevege seg det totale antallet kilometer østover og så det totale antall kilometer nordover. (Dette er egentlig ikke riktig på en kuleflate, slik jorda tilnærmet er!)

1.19 Regelen K3 uttrykker noe lignende som K2. Hvis vi setter r = 2, så svarer regelen til at en vektor legges sammen med seg selv. Et eksempel er [6,4] = 2*[3,2] = [3,2] + [3,2]. Når r er et positivt helt tall, kan K3 også tilbakeføres til K2 som gjentatt addisjon. Et eksempel er [9,6] = 3*[3,2] = [3,2] + [3,2] + [3,2].

Mer generelt er de rettvinklede trekantene gitt av (0,0), (a,0), (0,b) og (0,0), (ra,0), (0,rb) være formlike. Hypotenusen i den siste trekanten vil ved formlikhet være r ganger så lang som hypotenusen i den første trekanten.

1.20 C = (1,6).

1.21 D = (-3/2,4).

1.22 C = (7/2,-7/4).

1.23 D = (5/3,4/3), E = (9,-4).

KAPITTEL 2

2.1 5, 13, rot(5). Bruk av Pythagoras setning for rettvinklede trekanter.

2.3 AB =||**AB**|| = ||[2,-4]|| = rot(20)=4,47… AC = rot(5) = 2,23…
BC = rot(37) = 6,08…

Trigonometri: Pass på at kalkulator er innstilt på grader, deg. Måling på nøyaktig figur kan brukes som prøve på svaret, men du skal også kunne regne deg fram! Ikke bruk avrundede størrelser i mellomregninger.

2.5 a) AC = 2,9 cm. BC = 3,4 cm. Vinkel B = 40 grader.

b) AC = 2,7 cm. AB = 4,8 cm. Vinkel B = 35 grader.

c) AC = 6,0 cm (Pythagoras). Vinkel A = 31 grader, vinkel C = 59 grader.

d) BC = 1,9 cm. AC = 5,1 cm.

2.6 a) Kontroller svar med kalkulator.
b) cos (180^o – u) = - cos u.   sin (180^o – u) = sin u.

2.7 a) 6 cm^2 b) 0 cm^2 c) –4 cm^2 d) - 6 cm^2.

2.9 b) Her er det trykkfeil. Etter 'begrunn' skal 'at' strykes. Dessuten skal P2 erstattes med P3.

2.10 a) rot(5), rot (2), 5   b) 5, 2, 25. Svarene i a) er kvadratrøtter av svarene I b).

c) 1, 1, 11   d) 71,57 grader 81,87 grader 10,30 grader.

2.11 Skalarproduktet er 0. Regel: vektoren [-b,a] står alltid normalt på vektoren [a,b]. Det er bare 90 graders vinkel (mellom 0 og 180 grader) som har 0 som cosinus.

2.12 a) 19,65 grader b) 71,57 c) 171,87 grader.

2.13 a) **AB** = [2,1], **AC** = [1,3], **BC** = [-1,2].

b) vinkel A = vinkel C = 45 grader, vinkel B = 90 grader.

2.14 a) AB = rot(20) = 4,47 BC = rot(17) = 4,12 CD = rot(80) = 8,94 DA = rot(13) = 3,61.

b) Trapes. To sider er parallelle. Begrunnelse: **CD** = (-2) **AB**.

c) Kan regne ut vinkel D = 60,2555 grader ved å bruke skalarprodukt. Høyde: h = AD sin D = 3,13. Areal = (1/2) (AB + DC) h = 21.

2.15 a) Retningsvektor: [3,1], Normalvektor: [-1,3]. (Mange rette svar!)

b) Retningsvektor: [3,-2], Normalvektor: [2,3].

2.16 C(6,5), D(2,6).

2.17 Hemmeligheten her er at opplysningene gir at det er AC og BC som er like lange. Ellers kan ikke høyden fra C på AB være dobbelt så lang som AB. Høyden mellom de to like lange sidene i en likebeint trekant treffer midt på "grunnlinjen". Med **AB** = [3,2], **n** = [-2,3], så er
OC = **OA** + (1/2) **AB** + 2**n** = [3/2,8]. Altså er C(3/2,8).

2.18 a) Du kan ha fått 108,43 grader. Det er imidlertid to "kandidater" til vinkelen mellom to rette linjer. Man har blitt enige om at den minste av de to skal velges, dvs. 180 – 108,43 = 71,57 grader.

b) R(1,5).
c) P(-3/2,0), Q(6,0). **PR** = [5/2,5], **PQ** = [15/2,0], **RQ** = [5,-5].
d) Trekanten PQR er ikke rettvinklet. Oppgaven kan løses med cosinussetningen som finnes på side 55. Det er en glipp at dette spørsmålet kommer før den setningen er gjennomgått.

2.19
Hvis ABCD er et parallellogram er **AC** * **DB** = (**AB + BC**) * (**DA + AB**) =
AB * DA + AB * AB + BC * DA + BC * AB =
AB * (-BC) + AB * AB + BC * (-BC) + BC * AB = AB * AB – BC * BC.

Vi har brukt at **AD = -BC**. Første og siste ledd gikk mot hverandre. Til slutt har vi en differanse mellom kvadratet av lengden til AB og kvadratet av lengden til BC. Hvis ABCD er et parallellogram, vil derfor AC stå normalt på hverandre (AC * DB = 0) hvis og bare hvis lengden av AB er lik lengden av BC.

2.20
Vil vise at **BQ** står normalt på **AC**. Ved å bruke at **AC = AB + BC**, får vi:
BQ * AC = BQ * (AB + BC) = BQ * AB + BQ * BC =
BC * AB + BA * BC = BC * AB + BC * (-AB) = 0.
Vi har da brukt at **BQ * AB = BC * AB** og at **BQ * BC = BA * BC**. Den geometriske definisjonen av skalarproduktet gir disse likhetene. Poenget er at **BC** har samme projeksjon på **AB** som **BQ** har. Tilsvarende har **BA** samme projeksjon på **BC** som **BQ** har.

2.21
Har **AB** = [3,4]. Normalvektor **n** = [-4,3] peker i riktig retning, men har lengde 5. Høyden fås fra (7/5)**n**. Siden AB er grunnlinjen i en likebeint trekant, treffer høyden fra C midt på AB. Da er
OC = OA + (1/2)**AB** + (7/5) **n** = [0.9, 7.2]. (Svaret er eksakt!)

2.22
C = (5 + 9/13, 8 + 7/13). Vi må bruke normalvektoren [-5,12] til AB.

2.23

a) [5,0], b) [0,1], c) [2,3], d) [0,0], e) (11/17)[4,1].

2.24 Det blir samme projeksjon, (11/10)[1,3] i alle tre tilfellene. Hvorfor gir formelen for projeksjon samme svar? Hvorfor gir den geometriske definisjonen samme svar? (overlates til leseren)

2.25

OD = OA + AD = OA +$\mathbf{AC_{AB}}$ = [18/13, 14/13].

Areal = ||**AB**|| * ||**DC**|| *1/2 = 17/2 = 8 ½.

2.26 Punktet B(0,4) ligger på linja. En normalvektor **n** til linja er [1,-1]. Hvis C er punktet på linja nærmest B, så er **OC = OA + $\mathbf{AB_n}$** = [2,6]. Du kunne i stedet valgt et annet punkt på linja eller gått omvegen om B til C og tatt projeksjon på en retningsvektor i stedet for en normalvektor.

2.27 En mulighet er å se på $\mathbf{b_{-a}}$. Da er vinkelen mellom **–a** og **b** mellom 0 og 90 grader. Formelen er begrunnet i boka for det tilfellet. Geometrisk definisjon av projeksjon gir $\mathbf{b_a}$ = $\mathbf{b_{-a}}$. Ved å regne ut $\mathbf{b_{-a}}$ vil du se at minusene forsvinner/går mot hverandre.

2.28
a) 3/rot(5) = 1,3416.. b) Formel for linja er 1x + 0y – 3 = 0. D = 1.

2.29

a) **c** = [1,3], **n** = [3,-1]. (alternative svar finnes)

b) $\mathbf{OA_n}$ = [-3/2, ½], $\mathbf{OA_c}$ = [3/2, 9/2], $\mathbf{OA} = \mathbf{OA_n} + \mathbf{OA_c}$

c) 7/rot(10) = 2,2136…

d) C(21/10, 43/10). Areal(ABC) = 5 ¼ = 5,25.

2.31 La C svare til den minste trekanten og C' den største. Utregning gir AC = 3,928 cm. (flere desimaler i mellomregning)
Areal (ABC)= ½ AB * AC * sin A = 7,9 cm^2. Du kan regne ut AC ved å bruke sinusproporsjonen. Finner da først vinkel C' og <C = 180 grader - <C'. Alternativt kan du bruke cosinussetningen og få en annengradsligning med AC og AC' som de to løsningene.
AC' = 9,928 cm. Areal (ABC')= 19,9 cm^2.

2.32

a) Tegn opp en trekant ABC med vinkel BAC lik 120 grader. La punktet D være skjæringspunktet mellom forlengelsen av AB og normalen fra C på denne forlengelsen. Da er trekantene DBC og DAC rettvinklede. Sistnevnte trekant er en 30, 60, 90 trekant. Bruk Pytagoras først på trekanten DBC. Så får du inn b^2 og bc ved å bruke henholdsvis Pytagoras på trekanten DAC og at b er dobbelt så lang som DA.

b) Når vinkel A nærmer seg 180 grader, vil a nærme seg b + c. Siden cos 180^o = -1, blir cosinussetningen $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc = (b+c)^2$.

2.33

a) $34{,}9^o$, $59{,}1^o$, 5,2 cm b) $64{,}0^o$, $34{,}4^o$, $81{,}5^o$. c) $73{,}6^o$, $24{,}2^o$, $82{,}2^o$ d) $33{,}1^o$, $63{,}9^o$, 6,2 cm.

e) $97{,}7^o$, $38{,}3^o$, 6,1 cm. Det finnes to trekanter med de vinklene og sidelengdene som er oppgitt. Den "øverste" vinkelen er stump og er derfor 180^o - $82{,}3^o$. Vi har $\sin^{-1}(\sin(44^o) * 9{,}7/6{,}8) = 82{,}3^o$. Forlenges venstre vinkelbein til vinkelen på 44^o, kan et linjestykke med lengde 6,8 cm tegnes inn slik at vi får vinklene og lengden $82{,}3^o$, $53{,}7^o$, 7,9 cm.

2.34 BC = 3,9 cm , <B = 99^o, <C = 81^o, <D = 140^o.

2.36 To firkanter passer til de oppgitte vinkelmålene og lengdene. I) $113{,}2^o$ $74{,}8^o$, 11,3 cm passer med figuren i boka. II)$82{,}8^o$, $105{,}2^o$, 9,6 cm er den andre muligheten når siden på 3,3 cm haller andre vegen.

2.38

Korteste avstand er 599 m. (Tenk på siktlinje og fartsretning som vektorer.)

2.39

Avstand fra første måling til støtte: 293 m

Avstand fra andre måling til støtte: 259 m

Korteste avstand til støtte: 246 m

KAPITTEL 3

3.1

OA + **a** = [2, 1, 1]
OA + **b** = [1, 3, 1]
OA + **c** = [1, 2, 3]
OA + **a + b** = [2, 3, 2]
OA + **a + c** = [2, 2, 4]
OA + **b + c** = [1, 4, 4]
OA + a + b + c = [2, 4, 5]

3.3

$\|\mathbf{AB}\| = \sqrt{6}$

$\|\mathbf{BC}\| = \sqrt{8}$

$\|\mathbf{AC}\| = \sqrt{14}$

$\cos\angle B = \dfrac{\mathbf{BA}\cdot\mathbf{BC}}{\|\mathbf{BA}\|\cdot\|\mathbf{BC}\|} = 0$, så $\angle B = 90^\circ$

$\cos\angle A = \dfrac{\mathbf{AB}\cdot\mathbf{AC}}{\|\mathbf{AB}\|\cdot\|\mathbf{AC}\|} = \dfrac{4+3-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \dfrac{6}{\sqrt{84}} \approx 0{,}655$ så $\angle A \approx 49{,}1^\circ$

$\angle C \approx 180^\circ - 90^\circ - 49{,}1^\circ = 40{,}9^\circ$

3.4

a) $\mathbf{x}$ = [2, 1, 3] + t · [1, -2, -1]

b) $x - 2y - z = 0$

c) $(2+t) - 2(1-2t) - (3-t) = 0$ gir $t = \dfrac{1}{2}$. Skjæringspunktet blir $\left(\dfrac{5}{2}, 0, \dfrac{5}{2}\right)$.

d) Finner en passende *k* slik at *A* passer inn i $x - 2y - z = k$. Finner *k* = -3, så planet blir $x - 2y - z = -3$.

e) En måte å gjøre dette på er å finne lengden av vektoren mellom A og skjæringspunktet fra c). Lengden av den er $\frac{3}{\sqrt{6}} \approx 1{,}22$.

3.5
a) [0, 0, -25]
b) 75

3.6
a) **c =** [-7, 1, -3]. En ligning for planet er $-7x + y - 3z = 0$
b) **b** x **c** = [-10, -7, 21], **c** x **a** = [9, 24, -13] Geometrisk forklaring: **b** x **c** og **c x a** står normalt på normalvektoren **c** til planet Π. Siden dette er et plan gjennom origo, må de derfor være posisjonsvektorer til punkter i Π. (**b** x **c**) x (**c** x **a**) vil stå normalt på planet Π siden den står normalt på to ikke-parallelle vektorer i planet. Den må derfor være parallell med **c**.

3.7
a) [1, -1, 1] og [2, 1, -1] er normalvektorer. Siden skjæringslinja ligger i planet $x - y + z = 2$, må den stå normalt på [1, -1, 1]. Tilsvarende argument viser at den også står normalt på [2, 1, -1]. Vektoren
[1, -1, 1] x [2, 1, -1] = [0, 3, 3] står normalt på begge vektorene, og er derfor en retningsvektor for skjæringslinja.

Parameterframstilling: $\mathbf{x} = \left[\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right] + t \cdot [0, 3, 3]$

KAPITTEL 4

4.4

a) A′(1,2), B′(3,4), C′(0,4). (Konstruksjon vil gi deg dette sånn røffelig. Bruk av normalvektorer fra vektorregningen er et godt hjelpemiddel for både å tegne opp rotasjonene eller til å regne ut koordinatene.)

b) A′′(3,-2), B′′(1,-4), C′′(4,-4).

c) (90 + 180) grader = 270 grader.

4.5

a) A′(0,0), B′ = Q(-2,0), C′(-2,-2), D′(0,-2).

b) A′′(-4,0), B′′ = B′, C′′(-2,2), D′′(-4,2).

c) Kan parallellforskyve med vektoren **v** = [-8,0]. (Merk at parallellforskyvningen er det dobbelte av vektoren **PQ** gitt av de to rotasjonssentrene.

4.6

a) A′(4,1), B′(7,2), C′(5,4).

b) A′′(2,3), B′′(5,4), C′′(3,6). (Vektoren burde hatt navnet **v**.)

c) **w = u + v** = [2,4].

4.9 Oppgaven viser at glidespeilinger faktisk er forskjellig fra både speilinger, parallellforskyvninger og rotasjoner.

a) A′(2,2), B′(0,0), C′(0,2). A′′(2,0), B′′(0,-2), C′′(0,0).

b) Linja m har ligning y = 2x + 1. Den er midtnormalen til AA′′. Speiling om linja m ved hjelp av konstruksjon viser at B ikke speiles på B′′. Koordinatene til speilingen av B om linja m er (-4/5,2/5), men du ble ikke bedt om å regne ut det. (Kan regnes ut ved hjelp av projeksjonsregning.)

c) Har **u** = [4,-2]. B parallellforskyves med **u** til (4,-2).

d) Midtnormalen til CC′′ er linja med ligning y = 1. Den skjærer linja m i punktet P(0,1). Rotasjon 180 grader om P avbilder A på A′′ og C på C′′. Rotasjon av B med 180 grader om P gir C, ikke B′′.

4.10

a) **v** = [6,0]

b) Linja l har ligning x = 1.

c) Et eksempel på et punkt som avbildes ulikt av de to avbildningene er B(0,0). Alle punkter på linja med ligning x = -2 avbildes likt med de to avbildningene. Ingen andre punkter gjør det.

d) Hvis C(1,0), så avbildes C på C′′(7,0). Linja m har ligning x = 4. Den er linja l parallellforskjøvet med (1/2)**v**.

4.11

a) Punktene på l avbildes på seg selv når de speiles om l. Ingen andre punkter blir det. Punktene på m (og bare de) avbildes på seg selv når de speiles om m. Skjæringspunktet mellom linjene, origo, (og bare det punktet) avbildes på seg selv av begge avbildningene.

b) Sammensetningen av to odde avbildninger er like. Dessuten holder den sammensatte avbildningen bare et punkt i ro(origo). Derfor må den være en rotasjon om origo. Den avbilder (4,0) på (0,4). Dette er en rotasjon 90 grader om origo.

c) Når vi setter sammen to speilinger om to linjer som skjærer hverandre, blir sammensetningen er rotasjon om skjæringspunktet. Rotasjonsvinkelen er dobbelt så stor som vinkelen mellom de to linjene regnet fra den første linja og i positiv rotasjonsretning til den andre.

4.12

a) Glidespeilingen $G_{l,v}$ der l er linja med ligning x = 5/2 og v = [0,4].

b) Speilingen S_l om linja l med ligning y = 2x – 3/2.

4.13

a) S_m, der m er y-aksen. b) S_m, der m er linja med ligning y = -x.

4.14

a) Rotasjon 180 grader om punktet (0,-2).

b) Rotasjon 90 grader om punktet (4,6).

4.15

a) Rotasjon 240 grader om (2,3).

b) Parallellforskyvning med [2,-5].

c) Speiling om linja med ligning y = x-4.

d) Glidespeiling om linja y = x med vektoren [-2,-2].

4.16

a) 90 grader. Kan også si 180 grader, men da er l og m den samme linja.

b) Figuren blir et rektangel. Et hjørne er et punkt som skal avbildes. Diagonalt motsatt hjørne blir det avbildede punktet. Speilingsaksen blir en symmetriakse for rektanglet.

c) Vi lar u og v være parallellforskyvningsvektorene og S være den felles speilingen. Da er
$G_u \bullet G_v = (T_u \bullet S) \bullet (S \bullet T_v) = T_u \bullet (S \bullet S) \bullet T_v = T_u \bullet I \bullet T_v = T_u \bullet T_v = T_{v+u}$
Vi har brukt resultatet fra b og den assosiative loven for sammensetning.

4.17

a) Her er **v** en vektor normalt på linja l. Parallellforskyvning med **v** er det samme som først speiling om en linje normalt på **v** og så speiling om en linje til parallellforskjøvet med (1/2)**v** i forhold til den første. Tegn en linje l og en linje m som er l parallellforskjøvet med halvparten av **v**. Da er

$T_v * S_l = (S_m * S_l) * S_l = S_m * (S_l * S_l) = S_m * I = S_m$

I motsatt rekkefølge utnytter du at $T_v = S_l * S_n$, hvor n er l parallellforskjøvet med minus halvparten av **v**. (tegn opp!!)

$S_l * T_v = S_l * (S_l * S_n) = (S_l * S_l) * S_n = I * S_n = S_n$

Det er to forskjellige speilingslinjer avhengig av rekkefølgen avbildningene settes sammen. Altså kommuterer avbildningene ikke.

b) Har $T_v * S_l = S_m$, Hvor m er linja med ligning y = 2. **u** = [2,0] er parallell med m, så

$T_v * S_l * T_u$ er glidespeiling langs m med vektoren **u**.

Har $T_w = T_v * T_u$.

Vi vet også at $T_u * S_l = S_l * T_u$. Det er fordi **u** er en vektor parallell med l. Dette er glidespeilingssituasjonen. Da er

$T_w * S_l = T_v * T_u * S_l = T_v * S_l * T_u$. Dette er samme avbildning som vi alt vet hva er!

4.18

a) Tegn opp en linje l og marker punktene P (til venstre) og Q på denne linja.

Tegn opp linja m gjennom Q slik at m og l danner 30 grader vinkel. Dette skal gjøres slik at når du roterer m om Q med 30 grader i positiv retning, så får du l.

Tegn så opp linja n som danner 45 grader vinkel med linja l i punktet P. Det skal være slik at linja l må roteres 45 grader i positiv retning om P for å sammenfalle med n.

De to linjene m og n skjærer hverandre i et punkt R (på oversiden av l).

Da er $R_P * R_Q = (S_n * S_l) * (S_l * S_m) = S_n * (S_l * S_l)* S_m = S_n * I * S_m = S_n * S_m$.

Vinkel R i trekanten PQR er på 105 grader. Vinkelen mellom linja m og n blir derfor 75 grader i positiv retning.

Sammensetningen av to speilinger om to skjærende linjer er rotasjon om skjæringspunktet med det dobbelte av vinkelen mellom linjene. (Har allerede brukt denne sammenhengen til å gå fra 90 til 45 og fra 60 til 30.)

Svaret er dermed rotasjon om R med vinkelen 150 grader. Merk at rotasjonsvinkelen er summen av de to rotasjonsvinklene 60 og 90 grader.

b) Her blir det tilsvarende, men med nye linjer m og n. De skjærer hverandre under linja l. Du får den nye figuren ved å speile den gamle om l. Rotasjonssenteret blir et annet, så avbildningene kommuterer ikke.

c) Hvis summen av de to rotasjonsvinklene ikke blir 360 grader eller 0 grader, så vil alltid sammensetningen av to rotasjons bli en rotasjon. Ny rotasjonsvinkel blir summen av de to rotasjonsvinklene. Senteret finnes som over. Når summen av rotasjonsvinklene er 360 grader blir sammensetningen en parallellforskyvning. (Du får parallelle linjer m og n.)

KAPITTEL 5

5.1

a) Identitetsavbildningen, speiling om midtnormaler og diagonaler, rotasjon om sentrum med 90, 180 og 270 grader.

b) Identitetsavbildningen, speiling om diagonaler, rotasjon om sentrum med 180 grader.

c) Identitetsavbildningen, speiling om midtnormaler, rotasjon om sentrum med 180 grader.

5.2

a) Identitetsavbildningen, speiling om midtnormaler, rotasjon om sentrum med 120 og 240 grader.

b) Identitetsavbildningen, speiling om midtnormalen til siden som er ulik de to andre sidene.

5.3

Identitetsavbildningen, speiling om horisontal halveringslinje og speilinger om alle vertikale linjer gjennom hjørner til romber i mønsteret, 180 graders rotasjon om sentrum til alle rombene og de av rombenes hjørner som ligger på den horisontale halveringslinja, parallellforskyvning gitt ved en eller flere horisontale diagonaler i rombene, glidespeiling gitt ved en av de nevnte vektorene og den horisontale speilingslinja. (Dette er akkurat de samme symmetriene som i eksempel 5.4.1.)

5.4

a) Denne figuren har samme symmetrier som en regulær sekskant, dvs. identitetsavbildningen, speiling om en linje gjennom ytterpunktet til et ”blad” og sentrum, speiling gjennom hovedsentrum og sentrum av en ring, rotasjon om sentrum med 60, 120, 180, 240 og 300 grader.

b) Se bort fra øverste og nederste svarte linje. 180 graders rotasjon om midtpunkter til vertikale svarte linjestykker og midtpunkter til de korte horisontale svarte linjestykkene, parallellforskyvninger gitt ved linjestykker mellom to øverste venstre hjørner av horisontale svarte linjestykker.

5.5

Intuitivt: S og P er ikke (symmetrisk) likeverdige (i kvadratet) fordi S inneholder sentrum (av kvadratet). Det gjør ikke P. Formelt: Enhver symmetri for kvadratet avbilder sentrum på seg selv. Det vil si at S har et punkt som ikke kan avbildes på et punkt i P av noen symmetri for kvadratet.

5.6

a) Identitetsavbildningen og speiling om linja gjennom nederste venstre hjørne som danner 45 grader med nederste horisontale linjestykke.

b) Deler figuren i tre kongruente kvadrater ved å forelenge linjestykker slik at de går inn i figuren. Kvadratet i midten er ikke likeverdig med de to andre. Det inneholder hjørnet mellom de to lengste linjestykkene. Figurenes symmetrier avbilder dette hjørnet på seg selv. Derfor kan det ikke avbildes på noe punkt i et av de to andre kvadratene.

c) Den ene aksen for speilingssymmetri deler figuren i to fundamentalområder. Området kan deles inn i tre likebeinte rettvinklede trekanter. Alle tre er symmetrisk forskjellige i figuren.

5.7

a) P er sentrum av rektanglet. M og O er midtpunkter på de korteste sidene. L og N er midtpunkter på de lengste sidene. A, B, C og D er alle likeverdige hjørner i rektanglet.

b) Når alle sidene er like lange, er N, M, N og O likeverdige.

5.8

a) Åtte fundamentalområder bestemt av fire speilingsaksene. Du kan lage en tabell som vist under b.

b) Fire fundamentalområder bestemt av de to speilingsaksene. Kall (for eksempel) nederste venstre hjørne for 1 og nummerer de andre områdene 2, 3 og 4 fortløpende mot klokka. La l være vertikal speilingsakse og m horisontal speilingsakse. Da har vi

1->1	1->2	1->3	1->4
I	S_l	R_{180}	S_m

c) Tilsvarende b, men aksene er diagonalene.

d) To fundamentalområder. Draken deles i to av en speilingsakse.

e) Et parallellogram som ikke er en rombe har bare to symmetrier, identiteten og rotasjon 180 grader om sentrum. Deling i fundamentalområder kan skje på flere måter. Det enkleste er å dele parallellogrammet i to ved å tegne inn en av diagonalene.

f) Trapeset deles i to fundamentalområder av speilingsaksen.

g) Hele figuren er et fundamentalområde.

5.9

a) $G_{m,\mathbf{v}} \bullet G_{m,\mathbf{v}} = T_{2\mathbf{v}}$ gir parallellforskyvningssymmetri. Alle $G_{m,k\mathbf{v}}$ der k er oddetall, er glidespeilingssymmetrier. Alle $T_{k\mathbf{v}}$ der k er et partall gir parallellforskyvningssymmetri.

b) $G_{m,\mathbf{v}} \bullet S_l = R_P$, der P er skjæringspunktet mellom l og m parallellforskjøvet med (1/2)**v**. Rotasjonsvinkelen er 180 grader. $T_{2\mathbf{v}} \bullet S_l$ gir en ny speiling om en vertikal linje av samme type som l.

5.10

Avhengig av rekkefølgen, blir sammensetningen rotasjon om sentrum med 120 eller 240 grader. Vi kan få den siste speilingssymmetrien ved å sette sammen en av disse rotasjonene med en av de to speilingene (i rett rekkefølge).

5.11

a) $T_{-\mathbf{v}}$ gir b) R_S [fås fra $T_{\mathbf{v}} \bullet (T_{\mathbf{v}} \bullet R_Q)$] Systemet er at vi får rotasjoner om et punkt som er Q parallellforskjøvet med halvparten av parallellforskyvningsvektoren.

c) $R_P \bullet S_m = S_l$, hvor P ligger på l. Tilsvarende må $R_S \bullet S_m = S_n$, for S ligger på n.

5.12
Med figuren på s105, svarer S_l til 4<-3. Derav

$S_l \bullet R_{180}$ = (4<-3) • (3<-1) = 4<- 1 = S_m.

5.13

a) Anta at symmetrilinjene l, m og n kommer etter hverandre i positiv omløpsretning med 60 grader mellom hver av dem.

	$\mathbf{S_l}$	$\mathbf{S_m}$	$\mathbf{S_n}$	$\mathbf{R_{120}}$	$\mathbf{R_{240}}$	**I**
$\mathbf{S_l}$	I	R_{120}	R_{240}	S_m	S_n	S_l
$\mathbf{S_m}$	R_{240}	I	R_{120}	S_n	S_l	S_m
$\mathbf{S_n}$	R_{120}	R_{240}	I	S_l	S_m	S_n
$\mathbf{R_{120}}$	S_n	S_l	S_m	R_{240}	I	R_{120}
$\mathbf{R_{240}}$	S_m	S_n	S_l	I	R_{120}	R_{240}
I	S_l	S_m	S_n	R_{120}	R_{240}	I

b) La den regulære trekanten være ABC. Avsett et punkt A’ mellom A og B og tegn et kvadrat med AA’ som den ene siden. Bruk rotasjon 120 grader og 240 grader til å plassere tilsvarende kvadrater på de andre sidene. Figuren som da fremkommer har bare rotasjonssymmetri.

c) S_l er en av de odde symmetriene. Du ser av første rad i tabellen at de to andre speilingene fremkommer ved sammensetning med rotasjonssymmetrier.

5.14

a) Har S_n = (4<-3). R_P = (9<-4). $R_P \bullet S_n$ = (9<-4) • (4<-3) = 9<- 3. Dette er glidespeilingen $G_{l,\mathbf{v}}$, der v er den inntegnede vektoren.

b) La m og p være de to nærmeste inntegnede vertikale linjene til høyre for n. La Q være rotasjonspunktet i møtet mellom 4 og 5 og la O være rotasjonspunktet i møtet mellom 8 og 9. La 2**w** være parallellforskyvningen som sender område 4 på område 7. Da er

	$T_{2\mathbf{w}}$	$G_{l,\mathbf{w}}$	R_P	S_m
$T_{2\mathbf{w}}$	$T_{4\mathbf{w}}$	$G_{l,3\mathbf{w}}$	R_Q	S_n
$G_{l,\mathbf{w}}$	$G_{l,3\mathbf{w}}$	$T_{2\mathbf{w}}$	S_m	R_Q
R_P	R_O	S_p	I	$G_{l,-\mathbf{w}}$
S_m	S_p	R_P	$G_{l,\mathbf{w}}$	I

5.15

a) De like symmetriene er I og de tre rotasjonssymmetriene. En figur med bare disse symmetriene kan lages som i oppg. 5.13b.

b) Start for eksempel med speiling om midtnormalen til AB. De andre speilingene fremkommer ved å sette den sammen med de tre rotasjonssymmetriene.

c) Foiler vil si at linjestykket AB i romben ABCD forlenges litt til venstre for A. Tilsvarende forlengelse gjøres til venstre for B i BC, til høyre for C i CD og til høyre for D i AD. For rektanglet gjøres tilsvarende. Foiler diagonalt ovenfor hverandre må være like lange. Forklaring av egenskaper overlates leseren.