Ole Einar Torkildsen

Trachtenberg og multiplikasjon med 6

> Jacow Trachtenberg var en russisk-tysk ingeniør som etter en gripende skjebne som flyktning gjennom to verdenskriger lærte halve Sveits å regne og gjorde hundrevis av ingeniører, husmødre, bankfolk og kjøpmenn til levende regnemaskiner.
>
> (Schrøder, 1962, s.12)

Trachtenberg utviklet et regnesystem som blant annet gjør det mulig å utføre multiplikasjon med flersifrede tall som hoderegning. I denne artikkelen skal vi se på en liten del av Trachtenbergs regnesystem, multiplikasjon med 6.

For multiplikasjon med 6 angir Trachtenberg følgende, og vi kan godt si noe kryptiske, regel eller algoritme:

Legg halve naboen til hvert tall. Hvis tallet er et oddetall (ulike tall) må du også legge til 5.

Regelen trenger en utdyping og forklaring. Med naboen til et tall menes tallet eller sifferet til høyre for tallet. I tallet 245 er 5 nabo til 4, mens 4 er nabo til 2. Vi kan også si at 2 er nabo til en tenkt null helt til venstre i tallet. Likeledes kan vi la en null være nabo til 5, selv om 5 egentlig ikke har noen nabo.

Med «halve naboen» forstår regelen heltallsdelen til det halve tallet[1]. Halve naboen til 4 er $[4/2]$ som er 2. Halve nabo til 5 er $[5/2]=2$.

Som ved andre regnealgoritmer brukes også denne til å bestemme svaret siffer for siffer. Vi begynner med enerne, fortsetter med ti-sifferet, deretter hundre osv. helt til alle sifrene er bestemt.

Eksempel: Bestem $24\cdot 6$

Ener-sifferet blir her gitt som «tallet pluss halve nabo», det er $4+0=4$.

Da 2 er et partall (like tall) er ti-sifferet er bestemt ved den samme regel. Det blir

$$2+[4/2]=2+2=4.$$

Hundresifferet er gitt ved $0+[2/2]=1$.

Resultat: $24\cdot 6=144$

[1] I matematikken angir $[x]$ heltallsdelen til x. F. eks. er $[5/2]=2$

Eksempel: Finn $38 \cdot 6$

Sifrene i svaret blir:
Ener: $8+0=8$
Tier: Her er tallet et oddetall (3), regelen er da «tallet pluss halve nabo pluss 5». det gir

$$3+[8/2]+5=3+4+5=12.$$

Ti-sifferet er da 2, mens ett-tallet i 12 er et mentetall som «overføres» til hundre-sifferet (legges til).
Hundre: $0+[3/2]+1=2$.
Svaret er $38 \cdot 6=228$.

Metoden virker like greitt uansett størrelse på tallet som skal multipliseres med 6. Multiplikasjonen er helt og holdent overført til å beregne enkle summer, summer som bestemmer de enkelte siffer i svaret.

Eksempel: finn $543867 \cdot 6$

Ener: $7+0+5=12$, dvs. 2. Ett-tallet i 12 «overføres» til neste siffer, ti-sifferet.
Ti: $6+[7/2]+1=6+3+1=10$, dvs. 0, og ett-tallet «overføres».
Hundre: $8+[6/2]+1=8+3+1=12$, dvs. 2, og igjen «overføres» ett-tallet.
Tusen:
$3+[8/2]+5+1=3+4+5+1=13$, dvs. 3, igjen en «overføring» av et ett-tall.
Titusen: $4+[3/2]+1=4+1+1=6$
Hundretusen:
$5+[4/2]+5=5+2+5=12$, dvs. 2. Ett-tallet i 12 «overføres» til neste siffer.
Million: $0+[5/2]+1=2+1=3$
Dermed: $543867 \cdot 6=3263202$

Føringen kan også settes opp noe mer «tradisjonelt», f.eks. slik:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11111} \\ \underline{543867 \cdot 6} \\ 3263202 \end{array}$$

Begrunnelse for regelen

Hvorfor gir denne regelen alltid rett svar ved multiplikasjon med 6?

Hemmeligheten eller årsaken ligger i sammenhengen mellom tallet $10/2=5$, grunntallet i tallsystemet dividert med 2, og tallet 6. Regelen utnytter at $6=10/2+1=5+1$.

Multiplikasjon av partall

I første omgang vil vi vise regelen når alle sifrene i det tallet vi skal multiplisere med 6, er partall. Vi skal vise at sifrene i svaret blir bestemt etter regelen *tallet pluss halve naboen pluss eventuelle mente tall*. Vi går tilbake til det første eksempelet En alternativ utføring av multiplikasjonen står øverst på neste side.
Vi ser at eneren i svaret, her 4, blir gitt som tallet (ener i 24) multiplisert med 1, dvs. er lik tallet, eller som vi har uttrykt det tallet pluss null.

$$
\begin{aligned}
24 \cdot 6 &= (2 \cdot 10 + 4)(5 + 1) \\
&= 2 \cdot 10 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 1 \\
&= 2 \cdot 10 \frac{10}{2} + 2 \cdot 10 + 4 \cdot \frac{10}{2} + 4 \\
&= \frac{2}{2} \cdot 10^2 + (2 + \frac{4}{2}) \cdot 10 + 4
\end{aligned}
$$

Ti-siffer i svaret er her gitt ved $2 + 4/2$, dette kan uttrykkes som tallet pluss halve nabo, dvs. vår regel.

Hundre-siffer er $2/2$. Siden tallet i dette tilfellet er null, kan også dette uttrykkes som «tallet pluss halve nabo».

Siden 5 multiplisert med et partall alltid er et tall med ener-siffer null, kan et tilsvarende resonnement gjøres med et vilkårlig tall hvor alle sifrene i tallet er partall. Dersom vi får et to-sifret tall når regelen brukes, må tieren i dette to-sifrede tallet legges til sifferet på neste posisjon. Se eksempelet under.

$$
\begin{aligned}
86 \cdot 6 &= (8 \cdot 10 + 6)(5 + 1) \\
&= 8 \cdot 10 \cdot 5 + 8 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 1 \\
&= 8 \cdot 10 - \frac{10}{2} + 8 \cdot 10 + 8 \cdot \frac{10}{2} + 6 \\
&= \frac{8}{2} \cdot 10^2 + (8 + \frac{6}{2}) \cdot 10 + 6 \\
&= \frac{8}{2} \cdot 10^2 + (10 + 1) \cdot 10 + 6 \\
&= (\frac{8}{2} + 1) 10^2 + 1 \cdot 10 + 6 = 516
\end{aligned}
$$

Multiplikasjon av oddetall

Hvorfor må regelen modifiseres til «også å legge til 5» dersom det er et oddetall som skal multipliseres med 6?

Årsaken til dette ligger i det faktum at 5 multiplisert med et oddetall alltid gir et svar med ener-siffer 5.

Vi skal nå vise at når det er et oddetall innblandet så blir regelen *tallet pluss halve nabo pluss 5 pluss et eventuelt mentetall.*

Multiplikasjonen $47 \cdot 6$ kan utføres slik:

$$
\begin{aligned}
47 \cdot 6 &= (4 \cdot 10 + 7)(5 + 1) \\
&= 4 \cdot 10 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 5 + 7 \cdot 1 \\
&= 4 \cdot 10 - 5 + 4 \cdot 10 + (6 + 1) \cdot 5 + 7 \\
&= 4 \cdot 10 - 5 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 5 + 7 \\
&= 4 \cdot 10 - \frac{10}{2} + 4 \cdot 10 + 6 \cdot \frac{10}{2} + 12 \\
&= \frac{4}{2} \cdot 10^2 + (4 + \frac{6}{2} + 1) \cdot 10 + 2
\end{aligned}
$$

Vi ser at eneren beregnes som tallet, 7, pluss $1 \cdot 5 = 5$, $7 + 5 = 12$. Dermed blir ener-sifferet i svaret 2. Ti-sifferet i 12, 1, blir et «mentetall» og inngår som et ledd i den addisjonen som utføres for å beregne neste siffer i svaret.

Hver gang et oddetall inngår i multiplikasjonen har vi en situasjon som er helt parallell med den over. Oddetallet splittes i et partall pluss 1. Dette gir opphav til to produkter, hvorav produktet med partallsfaktoren inngår i beregningen av neste siffer. Det andre, som vil være $1 \cdot 5 = 5$, inngår i beregningen av det «aktuelle» sifferet.

Dette viser at når et oddetall multipliseres med 6 så er regelen *tallet pluss halve naboen pluss 5 pluss eventuelt et mentetall.*

6-gangen og regelen

Prøver vi regelen på produktene i 6-gangen, finner vi samme fine sammenheng.

Hvis n er et partall mindre enn 10, kan svarene på multiplikasjonen $n \cdot 6$ formuleres slik:

Ener i svaret er lik tallet, n, mens tier er lik halve tallet, $n/2$.

Med symboler:

$$n \cdot 6 = \frac{n}{2} \cdot 10 + n = (\frac{n}{2} n)_{\text{ti}}$$

Hvis n er oddetall større enn 3 og mindre enn 10 må vi ta hensyn til et mentetall. I dette tilfellet kan vi ikke formulere en like enkel regel. Vi har:

$$\begin{aligned} n \cdot 6 &= \frac{n-1}{2} \cdot 10 + n + 5 \\ &= (\frac{n-1}{2} + 1) \cdot 10 + (n - 10 + 5) \\ &= \frac{n+1}{2} \cdot 10 + (n-5) \\ &= (\frac{n+1}{2} \quad n-5)_{\text{ti}} \end{aligned}$$

Kontroller formlene over.

Multiplikasjon med andre tall

For multiplikasjon med 7 angir Trachtenberg følgende regneregel:

Doble tallet og legg til halve naboen. Hvis tallet er et oddetall (ulike tall) må du også legge til 5.

Prøv regneregelen.

Hvorfor gir denne regneregelen rett svar?

Kan du finne en enkel regel for å multiplisere et flersiffred tall med 9?

Litteratur

Schrøder, Michael (1962): *Lynregning*. Oslo: Aschehoug