

### ***Að rannsaka og uppgötva stærðfræði***

*Rannsóknarvinna í stærðfræði er vinnumáti þar sem nemendum gefst kostur á að uppgötva stærðfræði. Í greininni er því lýst hvernig hópur kennara við framhaldsskóla þróaði stærðfræðikennsluna í þessa átt. Vinnan felst í því að skoða markvisst og kanna, vinna verklega og leysa þrautir sem felast í viðfangsefninu. Í svonefndri hefðbundinni kennslu hefst stundin oft á því að kennari sýnir dæmi um leiðir til að leysa ákveðnar gerðir viðfangsefna. Síðan fá nemendur að spreyta sig á sams konar viðfangsefnum. Í rannsóknarvinnu hefst starfið aftur á móti á þraut eða verkefni þar sem ekki hefur verið kennd aðferð til að leysa heldur kanna nemndur málið og finna sjálfir heppilega leið til lausnar. Meðan á tilraunum þeirra til lausnar stendur uppgötva þeir ýmislegt sem með aðstoð kennarans er greint og samhengið skoðað skipulega. Í greininni er fjallað um vanda sem kemur fram þegar mæla á hæð fánastangar, að finna massa kúlu þegar vogin er ekki í lagi og að byggja stærsta kassa sem unnt er úr A4-blaði. Rætt er sérstaklega um viðbrögð nemendanna og þróunin í vinnunni er rædd sérstaklega svo og hvernig kennurunum þótti að vinna á þennan hátt.*

### ***Tutki ja löydä matematiikkaa***

*Eksploratiivinen matematiikka on nimitys työtavalle, joka tähtää siihen, että oppilaat saavat mahdollisuuden itse löytää matematiikkaa. Artikkelin kuva, kuinka ryhmä erään lukion opettajia on kehittänyt opetustaan tähän suuntaan. Tärkeitä tekijöitä on tutkiva työtapa, tutkimustehtävät ja ongelmaratkaisu. Perinteisessä opetuksessa opettaja johdattaa uuteen asiaan usein näyttämällä esimerkin, kuinka määrättyntyyppinen tehtävä ratkaistaan. Sen jälkeen oppilaat saavat soveltaa tätä mallia muutamiin tehtäviin. Eksploratiivisessa matematiikassa opettaja sensijaan lähtee tehtävästä, jonka oppilaat saavat ratkaista. Tutkimalla oppilaat saavat itse löytää sopivan menetelmän. Kun oppilaat työskentelevät löytääkseen ratkaisun, he tekevät koko joukon havaintoja, jotka opettajan avulla analysoidaan ja systematisoidaan.*

*Artikkelissa kerrotaan seuraavat esimerkit: lipputangon korkeuden mittaaminen, kuulun punnitseminen, vaikka punnussarja on epätäydellinen ja suurimman mahdollisen laatikon rakentaminen A4 - arkista. Pohditaan oppilaiden reaktioita sekä muuttuneen työtavan tuomia elämyksiä opettajalle.*



Mehri Moghaddam, Stellan Nilson, Olga Stankiewicz

# Undersöka och upptäcka

## Undersöka och upptäcka matematik på gymnasiet

Många elever uppfattar matematik som en utantillära. De tror att det till alla uppgifter finns en regel som man skall följa mekaniskt. Det sätt man uttrycker svaret på är viktigt och till och med viktigare än svarets innehåll. Eleverna upplever sig också i hög grad som passiva förbrukare av andras matematik. Den matematik som de hör läraren berätta om, präglad av kreativitet, problemlösning och undersökning, har de ringa erfarenhet av.

Den alltför frekventa definitionen av matematik som eleverna ger, ser ut ungefär så här:

”Till varje matteproblem finns det en formel som skall ge mig *ett* korrekt svar.”

Elevens uppgift blir då att lära sig alla formler och att sammanbinda ett problem med den korrekta formeln.

Följden av traditionell matematikundervisning kan bli att eleverna grundar sitt tänkande på det som de tror förväntas av dem (Boaler, 1996). De har svårt att känna igen situationer som är likartade. Många elever slutar att arbeta om ett problem är ovanligt svårt eller ovanligt lätt, om det kräver tankar som inte rör matematik eller en operation som inte är aktuell (t ex från föregående kapitel i läroboken). Och de elever som verkligen tror att matematik handlar om förståelse kan uppleva en konflikt!

## *Hur hög är flaggstängen på skolgården?*

Första matematiklektionen på gymnasiet, kurs A, har just börjat. Vi har presenterat oss för varandra men inte tagit fram läroboken.

*Hur kan vi ta reda på hur hög flaggstängen är? Diskutera i grupper hur ni skulle vilja bestämma höjden!*

Aktiviteterna börjar, en del elever är försiktiga, en del ivriga. Ingen vet något om kursmål eller betygskriterier men alla har fått ett problem att lösa. Förslag finns:

Klättra upp i flaggstängen; fälla den; göra två knutar på flagglinan: en i toppen och en vid marken; mäta skuggorna från flaggstängen och en klasskamrat samt kamratens längd ... fast det är mulet idag. Någon kommer på att man lika gärna kan kika längs den linje solstrålarna skulle ha gått. Varför inte rita en skalenlig figur och sen mäta i figuren? Man borde kunna ringa tillverkaren och fråga. Vaktmästaren kanske vet!

## **Att vända på ordningen**

I traditionell matematikundervisning börjar alltid läraren med att visa hur man löser ett visst problem, hur man bevisar eller härleder något. Därefter förväntas eleverna ha lärt sig och de ska utifrån denna kunskap öva problemlösning – dvs syssla med varianter av det problem som läraren visat på tavlan. Detta sätt tar sin utgångspunkt i att eleven inte kan någonting från början men har kunskapen efter genomgång och övning. Det anser vi är fel. Eleverna saknar inte erfarenheter, matematiska



*Hur hög är flaggstången?*

modeller eller lust att lösa problem. De har kunskaper som de kan använda för att utveckla sin matematikförståelse.

Om de i stället får börja med att lösa ett väl valt problem gör de upptäckter som läraren kan hjälpa dem att systematisera och analysera. Flaggstångsproblemet är ett sådant. Alla elevförslag kan och ska diskuteras. En del av dem kan ledas in på ett resonemang om förhållanden mellan kateter och vinklar i en rätvinklig triangel och tangens för en vinkel kan definieras. På så sätt har eleverna lärt sig utifrån sina egna aktiviteter, inte lärarens. Eleverna har gjort matematiken till sin egen. Lärarens roll är att göra eleverna medvetna om hur de tänkt. Denna roll är viktig – den är viktigare än att bara visa hur man gör. Det är detta vi kallar explorativ matematik – undersökande matematik.

### **Eleverna upptäcker**

Vår undervisning, som bygger på det explorativa lärandet, stöder på tre ben: upptäckten, laborationen och projektet. Vi undviker traditionella genomgångar. I stället får eleverna upptäcka matematik. Detta sker ofta genom experiment i helklass eller genom elevernas självständiga undersökningar. Det blir naturligt att eleverna resonerar med varandra om uppgifterna. Matematikskapande är en social process. Ofta kan eleverna upptäcka sådant som vi lärare inte avsett att lyfta fram.

Då är det viktigt att bejaka elevens lärande och att utnyttja elevens kreativitet. På så sätt kan matematikundervisningen berikas och fördjupas. Först efter elevernas upptäckter är det dags för en sammanfattning och generalisering av vad de funnit. Detta sker bäst då vi ”går laget runt”, diskuterar och skriver ner olika mätresultat, Lösningstrategier, upptäckter, varianter osv på tavlan. På det sättet lär sig också eleverna att man tänker olika och att resultatet kan uttryckas på flera olika, korrekta sätt. Det är också ett sätt att bryta fixeringen vid facit.

### **Börja i det konkreta**

Visst har vi alla använt balansvägen som en modell för ekvationer! Att också använda vägen till att faktiskt väga med ger eleven helt nya förutsättningar att förstå ekvationerna.

### ***Hur mycket väger kulan?***

Eleverna får först bekanta sig med vägen och dess funktion, inklusive jämviktsläge, med hjälp av en viktsats. Därefter får de fem stålkulor och uppgiften att väga dem. I viktsatsen saknas vissa vikter så att det är omöjligt att få jämvikt genom att bara lägga vikter i ena skålen.

1. Bestäm vikten på en kula. Vi antar att alla kulor väger lika mycket.
2. Skriv upp en ekvation som svarar mot dina tankegångar/genomgångar.



*Väger det jämnt?*

3. Lös ekvationen! Får du samma svar nu som du fick i uppgift 1?

Eleverna försöker ofta lägga vikter i ena skålen och kulor i den andra, men tvingas att ändra strategi och börjar även lägga vikter i samma skål som kulorna.

I uppgift 1 utgår eleven från ett sätt att räkna som han eller hon redan kan. I andra uppgiften skriver eleven upp en ekvation som konkret beskriver vägen med vikter som eleven har framför sig. Uppgift tre innebär en utveckling och formalisering av beräkningen i uppgift 1.

Arbetet avslutas med att några elevexempel redovisas på tavlan och diskuteras gemensamt i klassen.

### Att laborera föder nya begrepp

Ibland saknar eleverna nödvändiga föreställningar för att förstå och tillämpa matematik. Vilka erfarenheter har t ex eleverna som gör begreppet derivata begripligt och angeläget? Och – för att återgå till kurs A – har eleverna tillräckligt många och tydliga konkreta exempel på proportionaliteter för att vara mogna för det begreppet? Här kan laborationen hjälpa till i begreppsutvecklingen, så att eleven får erfarenheter att utgå från i stället för att hamna i ett mekaniskt och kanske obegripligt räknande. Att mäta par av storheter och sedan rita diagram bäddar för förståelse. Exempel på sådana par är: cirkeldiameter – omkrets, arean hos pappkvadrater – kvadraternas vikt, spritvolym – spritens massa, varukostnad – varumängd.

### Att bygga en låda

- Eleverna får var sitt A4-papper.
- Klipp bort fyra lika stora kvadrater i hörnen, kvadrater med sidan 1 cm, 2 cm, 3 cm osv. Varje grupp klipper bort olika mycket.
- Vik upp sidorna så att det blir en öppen låda.
- Vilken låda har störst volym?
- Undersök volymen som en funktion av höjden.

- Undersök också begränsningsarean som en funktion av höjden.

Eleverna uppskattade verkligen denna laboration, som konkretiserade minimi- och maximiproblem.

### Elevernas initiativ styr

I en klass gjorde vi följande övning, som syftade till att förstå lösning av ekvationssystem (Heikne & Larsson). Eleverna fick en tom ask, en med 3 skruvar och 2 muttrar och en med 2



Vilken låda är störst?

skruvar och 4 muttrar samt en väg. Uppgiften var att bestämma massan hos muttrarna och skruvarna.

Eleverna fann att de genom lämpliga jämförelser kunde eliminera t ex muttrarnas



Nu ska vi lösa ekvationssystem

vikt och sedan få skruvarnas vikt. Läraren hade förväntat sig att eleverna skulle väga och räkna på ett sätt som motsvarade subtraktionsmetoden, och det gjorde också de flesta. Men två grupper gjorde på ett annat sätt! När de förklarade hur de gjort, framgick det att de använt substitutionsmetoden. När klassen sedan värderade olika sätt att lösa problemet, fanns mycket mer att resonera kring än det funnits om bara det läraren hade förberett hade fått komma fram. Vid undersökande matematik lär sig eleverna att analysera, använda och tillämpa matematik och det ger goda möjligheter att värdera metoder och lösningar, som i det här fallet med ekvationssystem.

### Läroboken – ett komplement

Läroboken har fått en annan roll hos oss än vad som är brukligt, den är främst ett kompendium med övningsexempel och vi känner oss inte styrda av hur läroboken är upplagd. Exempelvis låter vi geometrin vara utgångspunkten för A-kursen. Vi brukar säga: "Geometrin innehåller allt". Begrepp som proportionalitet och förhållande liksom algebraiska förenklingar kan lätt visas. Vid problemlösning får man ofta användning för procent- och bråkräkning.

Den traditionella läroboken har många gånger uppmuntrat teoristyrkt lärande i stället för elevstyrd aktivitet. Läroböcker framställer ofta matematiken som en sekvens påståenden eller teorier som skall övas. Först presenteras en metod som följs av färdighetsträning, därefter sätts metoden in i ett sammanhang. Vi anser att det hämmar elevens kreativitet. Vi vill göra tvärtom. Vår princip är att fördjupa frågeställningen när problem dyker upp. När eleverna t ex får olika resultat då de mäter samma längd uppstår behovet att avrunda. På det sättet blir eleverna motiverade att lära sig de moment som annars kan upplevas som tråkiga om de tränas utan sammanhang. Vi vill inte behöva besvara frågan "varför skall vi lära oss det här?" med "därför att vi skall använda det senare".

### Alla kan lyckas

De flesta övningar med explorativ inriktning är sådana att varje elev kan utföra dem, åtminstone delvis. Möjligheterna att individualisera ökar. Varje elev väljer det sätt att lösa problemet som passar honom eller henne bäst, en del har mer generella lösningar medan andra har mer konkreta.

Det fina är att nästan varje sätt kan öka elevens kunskaper i matematik. Eleven kan relatera till den matematik han eller hon redan erövrat och vi kan möta varje elev på hans eller hennes nivå. Det blir också möjligt att bejaka varje elevinitiativ.

### Våra erfarenheter

Att arbeta med undersökande matematik är roligt! Som lärare får vi goda möjligheter att samtala med eleverna om de matematiska frågorna. Eftersom tyngdpunkten ligger på elevens funderingar och inte på någon förutbestämd teori, får vi som lärare god insikt i hur eleven tänker. Elevens infallsvinkel är inte alltid lärarens, utan oväntade aspekter kan dyka upp.

### Vad säger eleverna?

De allra flesta elever accepterar vårt arbetssätt och uppskattar det. Men även proven måste innehålla aktiviteter eller laborationer för att eleverna ska förstå att de är viktiga. De nationella proven i matematik går i den riktningen. Vi har använt provuppgifter som laborativt behandlat bl a mönster, triangelritning, areaberäkning och  $\pi$ .

#### *Ett exempel:*

Eleverna hade tillgång till en femkrona, en tavelpenna, ett glas samt en papperslinjal.

- **Visa** att omkretsen  $y$  hos en cirkel är proportionell mot diametern.
- **Bestäm** proportionalitetskonstanten  $k$  och **tolka** innebörden av denna.

## **Blir det inte dyrt?**

Undervisningsmaterielen är ofta billig. Papp- och plastbitar, häftstift, saxar, tejp, måttband, legobitar ... En del kan lånas från fysikinstitutionen men det är viktigt att, som vi har gjort, bygga upp matematikinstitutionen för att underlätta arbetet och också för att ändra synen på matematik.

## **Men kräver inte allt detta mer arbete?**

Allt kräver mer arbete första gången, men i det långa loppet skiljer sig inte explorativ matematik från "vanlig" matematik i detta avseende. Man ska inte ställa för stora krav på sig själv. Vi har utvecklat vår undervisning lite i taget, under flera år, i mån av tid. Det roliga är, att det aldrig tar slut! Hela tiden prövar vi nya laborationer och lär oss utnyttja redskap som tex grafitande miniräknare och datorer på nya sätt. Det är oerhört spännande att se om en ny idé fungerar, och om den kan förbättras.

## **Hur gör man om man känner sig osäker och tvekar?**

Vi vill föreslå att ni börjar med ett kapitel, förslagsvis geometrin. Låt i gengäld hela undervisningen kännetecknas av ett undersökande arbetssätt. Inled ett område med någon undersökning, diskutera i klassen, ge aktiviteter i läxa, ha laborativa inslag i provet och följ inte nödvändigtvis boken.

## **Hur hinner vi kursen?**

Matematiktimmarna är lika många oavsett hur vi arbetar. Alltså arbetar vi på ett sätt som vi anser leder till att eleverna lär sig mest. Mest är inte alltid kvantitet! Kvaliteten är minst lika viktig! Något avsnitt kan behöva behandlas summariskt. Eftersom olika moment från kursen repeteras i de flesta övningar, får eleverna ändå goda möjligheter att öva.

Det tar tid innan man som lärare blir bra på ett nytt sätt att arbeta. Vi upptäcker att alla aktiviteter inte är bra för alla. De får inte vara för lätta, inte för svåra och olika klasser kräver

olika övningar. Att bestämma volymen hos en pappkartong är trivialt för en del, men svårt nog för andra. En aktivitet vi tänkt ut och tror är lysande kanske inte säger eleverna något alls. Vi behöver lära oss elevperspektiv.

## **Internationella erfarenheter**

Undersökande arbetssätt fungerar bra i klasser med elever på olika nivå. Jo Boaler (Boaler, 1997a) beskriver en studie som gjorts på två skolor i England. På den ena skolan bedrevs undervisningen på ett traditionellt sätt, medan den andra hade ett mer projektorienterat arbetssätt. Det visade sig att eleverna som haft ett friare och mer undersökande arbetssätt fick ett bättre resultat på traditionellt nationellt prov, även om de "inte hunnit med kursen". Det antogs bero på att de hade utvecklat en förmåga att anpassa och förändra metoder inför nya och oväntade situationer. Eleverna hade en tro på att matematik involverade aktivt och flexibelt tänkande och de såg ingen skillnad mellan skolmatematiken och den matematik som behövdes utanför skolan. Fler elever valde också att fortsätta med matematikstudier.

En oväntad "bieffekt" av de nya metoderna var att flickorna trivdes mycket bättre med matematikundervisningen och i större utsträckning valde att läsa matematik vidare. (Se också Boaler, 1997b; Emanuelsson, 1998) Dessa metoder har även testats under en längre tid i fem skolor i socialt utsatta områden i USA, där de har visat sig effektiva och inspirerande och fått skoltrötta och omotiverade elever att lära sig matematik. (Silver, 1997)

## **Visioner**

Vår erfarenhet är att det är svårt att bryta en ond cirkel för omotiverade och desillusionerade elever, om de efter många års traditionell undervisning har tappat tilltron till sin egen förmåga. Vi hoppas att vi tillsammans med grundskollärarna och nya läromedel ska få elever som har arbetat på ett utvecklande sätt genom hela sin skoltid.

Det tar tid att förändra undervisnings-traditionen. En kortare tids arbete är otillräckligt för en egentlig utvärdering, men tillräckligt för att nyfiket gå vidare! Vårt mål är att skapa en levande matematikmiljö. Vi önskar vi hade speciella matematiksalor utrustade med datorer så att eleverna kan undersöka tex geometriska samband direkt då de dyker upp. I salarna ska också finnas mätverktyg, demonstrations- och laborationsmateriel samt matematiklitteratur, dvs allt det som kan behövas på en lektion. Vi vill ha runda bord för grupparbeten och fria ytor för att utföra experiment.

I vår vision är matematik ett ämne som beskrivs som dynamiskt, roligt, allmänt, högprioriterat, centralt, fantasifullt, tillämpat, integrerat ... Det tar tid men vi tror att många små men medvetna steg kan leda dit.

## Referenser

- Boaler, J. (1997a). *Experiencing School Mathematics. Teaching styles, sex and setting*. London: Open University Press.
- Boaler, J. (1997b). Projektorientering ger bättre resultat. *Nämnanen* 24(3), 13–18. Göteborgs universitet.
- Emanuelsson, J. (1998) Hur hänger lärande och undervisning ihop? *Nämnanen* 25(2), 6–8. Göteborgs universitet.
- Heikne, H. & Larsson, K. (1996). *111 laborativa matematikuppgifter*. Krister Larsson 0121/12524 e-post: Krister.larsson@mbox303.swipnet.se
- Heikne H. & Larsson, K. (1998). *LabMaC Laborativa Matematikuppgifter kurs C*. Krister Larsson 0121/12524 e-post: Krister.larsson@mbox303.swipnet.se
- Silver, E. (1997). *The Quasar Project*. University of Pittsburg. Stencil.