

Listin að segja ekki allt

Í stað þess að kennarinn afhjúpi sjálfur leyndardóma stærðfræðinnar geta nemendur fengið sem verkefni að leita upplýsinga og gera grein fyrir uppgötvunum sínum. Slík leið kennir nemendum að vinna saman. Nemendum var skipt í heimahópa og sérfræðihópa. Efninu var skipt upp í aðskilda þætti. Fyrst unnu nemendur í sérfræðihópi með mismunandi efni sem tengist Fibonacci. Þau þemu sem unnið var með voru runa Fibonacci, hlutföll, stærðfræðivefur og fæðingar kanínufjölskyldunnar. Síðan leyst nemendur upp sérfræðihópnum og fóru í heimahópana. Hver meðlimur í heimahópnum hafði þannig eitthvað fram að leggja um mismundandi þætti þemans. Nemendur lærðu mikið af að skýra fyrir öðrum og mikið var það hvetjandi! Það er erfitt að láta vera að segja frá öllu.

Älä kerro kaikkea!

Sen sijaan että opettaja paljastaa matematiikan salaisuuksia, voivat oppilaat saada tehtäväkseen itse ottaa selvälle tietoja ja esittää löytämänsä muille. Näissä tapauksissa yhteistoiminnallinen oppimismuoto, palapelimenetelmä, voidaan käyttää apuvälineenä. Jakamalla Fibonacista kertova aineisto eri osiin ja oppilaat kotiryhmiin ja asiantuntijaryhmiin, saivat oppilaat jokainen osaltaan tuoda jotakin mukanaan yhteiseen osaamiseen. Oppilaat työskentelivät ensin asiantuntijaryhmässä oman Fibonacista kertovan tiedon kanssa. Eri asiantuntijaryhmässä käsiteltiin seuraavaa: Fibonacin lukusarja, harmoniset suhteet, matemaattiset spiraalit ja kaniinien lisääntyminen. Oppilaat siirtyivät tämän jälkeen asiantuntijaryhmästä kotiryhmäänsä. Jokainen kotiryhmän jäsen esitti uutta tietoa kotiryhmälleen. Miten hyvin he oppivatkaan selittäessään toisilleen ja miten uppoutuneita he olivatkaan tehtäväänsä! On vaikeaa olla kertomatta kaikkea.



Siv Lindholm

Konsten att inte berätta allt

Hur gör ni med julklapparna i er familj? Gör ni er besvär med paket och verser? Hör det till programmet att barnen får leta efter gömda paket? Eller gör ni det enkelt och bekvämt? Åker jumpern och halsbandet, deckaren och legobitarne ner i samma korg eller säck? Lika värdefulla är ju presenterna ändå!

Ett löjligt och inaktuellt resonemang en vintervinterdag, javisst. Men det dök upp för mig härömdagen. I årskurs 7 började vi med ekvationer. Det är ett entydigt tema, klara regler, lätt att undervisa. Kanske dags att förnya undervisningen litet? Högstadielärare i matematiska ämnen i Finland har nästan alltid kombinationen matematik – fysik – kemi. Jag har således laborationsutrustningen nära till hands. Fram med vägskälarna tillhörande en balansvåg anno dazumal. Jag laddar upp med 25 cm³ cylindrar och 10 cm³ klossar av mässing, sådana finns i lager. Två cylindrar och en kloss i ena vägskålen, sex klossar i den andra. Jag lägger till eller tar bort lika många klossar i vardera vägskålen och jämvikten består. Och jag kan fortsätta med att illustrera alla räkneregler för ekvationer! Roligt var det dessutom, åtminstone för mig.

Samma eftermiddag frågar min kollega Gunilla – tjugo år yngre och med tio års lärarerfarenhet – om jag börjat med ekvationer. Dessutom frågar hon om jag använt våra arbetsblad. För ett par år sedan satte vi nämligen ihop material för samarbetsinläring av ekvationer. Detta material hade hon använt,

eleverna hade diskuterat i grupper, gjort upptäckter och påbörjat sin väg mot insikt.

Där stod jag och kände mig som julgubben, som glömt att slå in julklapparna! Hade jag rentav avsiktligt glömt vår utarbetade undervisningsföljd för att få berätta allt själv?

Men när det är så roligt

Vad gör då en matematiklärare i mormors-åldern / julgubbsåldern, som tycker att det är så roligt att berätta om matematiska samband, händelser och stormän? Hon vet efter trettio år som lärare, att Pythagoras offrade en hekatomb av glädje över sitt satsbevis, vad det stod på Arkimedes gravsten, hur Fibonacci kom fram till sin talföljd, Pascal till sin triangel, att Ramanujan var personlig vän med alla naturliga tal och så vidare. Hon vet, att man kan konkretisera potenserna av två genom att vika ett papper, ja hon vet dessutom hur många gånger man måste vika papperet för att komma till månen. Är exponenten negativ, – varsågod och riv papperet itu i stället, en rutinerad lärare blir inte svarslös. Men frågorna kunde vara många fler. Är det rentav kanske inte så roligt att fråga, om svaret kommer direkt?

”Få svar på aldrig ställda frågor är ju något av det tristaste som finns”,

säger Sören Törnqvist i sin bok Fysik per vers.

Hur göra i stället?

En elevgrupp skulle nog kunna diskutera sig fram till sambandet mellan potenserna av två och pappersvikning om de bara fick litet puffar i rätt riktning. Senast det var aktuellt med potensers värde, ifrågasatte en elev mycket bestämt, att ett papper som viks dubbelt sex gånger skulle ge sextifyra papperslager. För att bevisa att jag hade fel vek han ett papper sex gånger och gjorde sig besväret att borra passarspetsen igenom alla lager! Slutligen räknade han hälen. Han fick en aha-upplevelse och $2^6 = 64$ blev därmed hans egen kunskap. Jag stod bredvid och förundrades; mitt bidrag var att låta bli att avbryta, i gengäld fick jag beskåda ett laborativt arbetssätt som kröntes av insikt!

Potenserna av två har så många andra infallsvinklar. Schackspelets uppfinnare bad ju om en anspråkslös belöning; ett riskorn på första rutan, två på andra, fyra på tredje och så vidare. Och visst kan det vara roligt att leka med tanken på hur många förfäder vi borde hitta bland människorna som levde vid vår tideräknings början; två föräldrar, fyra far- och morföräldrar, åtta stycken när vi går tre generationer bakåt. Räknar vi med så där tre generationer per sekel, vad blir det då? Jag lovar en intressant diskussion, om man jämför antalet förfäder är ett med jordens sannolika befolkning vid denna tid. Matematik är sannerligen mycket mera än räkning!

Nästa gång det är aktuellt med potenser, det lovar jag mig själv, skall jag ha material, som hjälper eleverna att komma fram till det här genom arbete i grupp! Eller vågar jag släppa fram dem till andra samband, tillämpningar som jag inte har funderat ut på förhand men som är deras egna?

Pusselmetoden

Men det gäller här och nu. Min åttondeklass påminde mig senaste lektion om att man "brukar" ha rolig lektion när terminen slutar. Oförberedd på detta förklarade jag att vi sista lektionen skall syssla med smyginläring av

linjära funktioner, men nästa termin inleder vi med "rolig" lektion. Så fick jag ett litet andrum och kan man tänka sig, linjära funktioner är mycket roligare, om de är litet förbjudna!

När nästa termin börjar har jag hunnit förbereda mig. Under vinterlov har jag läst dokumentationen från senaste matematikbiennal. I flere sammanhang påträffar man där Fibonacci och jag kombinerar med det jag kan från tidigare och slår upp för att hitta mera om ämnet. Det är så roligt arbete, att det borde eleverna själva få göra! Om jag använder pusselmetoden borde det vara möjligt.

Jag har tidigare prövat på pusselmetoden som ett hjälpmedel i samarbetsinläring. Där delas stoffet in i separata delområden. Eleverna i en hemgrupp eller arbetsgrupp får olika delområden att studera för att var och en bli expert på sin del. Elever från olika hemgrupper som fått samma uppgift bildar en expertgrupp för att hjälpa varandra att leta fram fakta och förstå. Sedan går var och en tillbaka till sin hemgrupp och fungerar som lärare och resursperson för de övriga. Alla har då bidragit med sin pusselbit, alla har fått förklara och vara expert på sitt område. Och så bra man lär sig när man förklarar för andra!

Den här gången har jag gjort uppgiftspapper som bas för arbetet i expertgruppen. Och jag har inte varit renlärig och gjort separata pusselbitar utan de överlappar varandra delvis. Varje expertgrupp får endast ett papper så att de gör egna anteckningar inför presentationen i hemgruppen. I klassen ger jag enkla instruktioner. Eleverna delas in i hemgrupper om fyra. I varje grupp numreras eleverna. Alla ettor arbetar tillsammans i sin expertgrupp (Fibonacci's talföljd), tvåorna i sin (Harmoniska proportioner), osv. Under de tjugo minuter som ges för den delen av arbetet hinner jag kontrollera att det fungerar. Efter detta går alla tillbaka till sina hemgrupper och var och en skall se till att alla i hemgruppen får ens pusselbit och förstår den. Här gäller det att uttrycka sig, att använda sitt eget språk för att de övriga

skall inse det man själv insett i det gemensamma arbetet i expertgruppen.

Arbetsuppgifter

I arbetsuppgifterna för expertgrupperna lät jag avsiktligt vissa samband komma fram flera gånger. Kamraterna i hemgruppen har lättare att ta till sig nya fakta, när de kan kombinera med tidigare kunskap. Uppgifterna var dessa:

FIBONACCIS TALFÖLJD

- Fibonaccis talföljd är en följd av tal, där varje tal (från och med det tredje i ordningen) är summan av de två närmast föregående:

1, 1, 2, 3, ...

Fortsätt följd, om det sjunde talet är 13, gör du rätt!

Fortsätt ända till talet 987, som är det största tresiffriga i följd. Följden är oändlig.

- Bilda kvoten av ett fibonacci-tal och det närmast föregående, räkna ut närmevärde med tre decimaler:

$$\frac{1}{1} = , \frac{2}{1} = , \frac{3}{2} = , \frac{5}{3} = , \text{ osv.}$$

Anteckna värdet av de tio första kvoterna.

Vad märker du då?

- Räkna ett närmevärde för uttrycket $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Kommentera!

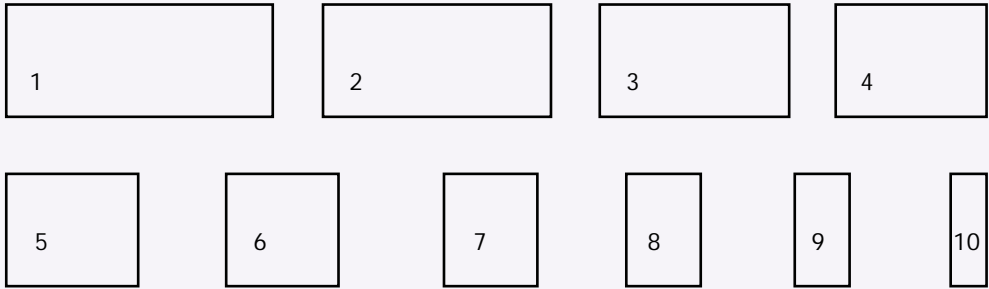
Detta kallas det gyllene snittet. Grekerna upptäckte att om man delade en sträcka enligt detta förhållande, var det mycket tilltalande för människans öga. Enligt dessa proportioner byggde t.ex. antikens tempelbyggare Parthenon uppe på Akropolis i Aten. Vem har sett platsen?

Mera information än så gavs inte åt expertgruppen. De fick själva anteckna det som skulle framföras åt hemgruppen. Uppgiften var lätt, speciellt i början, där de satt med räknare och tävlade om att först komma fram till 987. Det svåraste var proportionsbegreppet, men det klarnade i hemgruppen när alla pusselbitar kom på plats. Uppslagsverk fanns till hands, så de kunde leta fram en bild av Akropolis. De hittade också det gyllene snittet i uppslagsverket och fick mera bakgrundsfakta..



Alla i expertgruppen fick en kopia av rektanglarna, så att de kunde undersöka vad kamraterna i hemgruppen hade för åsikt om rektanglars "skönhet". Givetvis gick åsikterna isär; antalet tillfrågade var inte statistiskt tillförlitligt. Vi beslöt, att samma elever senare i samband med statistiken gör en enkät i en större population.

Eleverna slog upp det gyllene snittet, da Vinci och Le Corbusier i lexikon. Att mäta om ens navel delade kroppen i harmoniska proportioner var populärt. Flera ville diskutera varför det inte stämde så bra på dem. De tyckte att överensstämmelsen var dålig om andra decimalen avvek från det teoretiska värdet! Här fanns orsak att gå in i diskussionen. Dels fick vi ha olika åsikter om vikten av att äga "en ideal kropp", dels kunde vi konstatera att benen växer snabbt i fjortonårsåldern och sist men



HARMONISKA PROPORTIONER

- Diskutera er fram till vilka två rektanglar som är "vackrast", vilka som har de mest tilltalande proportionerna:

Skulle ni fråga hundra eller tusen personer, skulle rektanglarna 3 och 8 vinna klart.

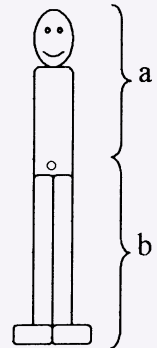
De har så kallade **harmoniska proportioner**:

Mät längd och bredd och dividera. Vad blir kvoten?

För dessa rektanglar gäller: (ca 1,6).
Tänker du dig en framtid som arkitekt är detta **gyllene snitt** väsentligt. Enligt dessa proportioner byggde t.ex Le Corbusier.

- Leonardo da Vinci ansåg att människans navel delar kroppen i harmoniska proportioner. Stämmer det in på er?

Mät era mått och beräkna kvoten b/a .



inte minst insåg alla, att om man mäter slarvigt kan man inte kräva stor noggrannhet av resultatet.



För denna del behövs passare, tavelpassare och tilläggs-papper beroende på hur stor figur som ritas. Uppgiften är konkret och tacksam att presentera. När experterna kommer till hemgrupperna ser medlemmarna snabbt sambandet med talföljden.

Att hitta tillämpningarna i naturen är svårare. Snäckan kommer någon på, sedan kanske en kotte men därefter är det stopp. Här behövs bistånd. Nästa gång skall jag ha en stor torkad solros i beredskap! En liten filosof säger, att det är helt logiskt att matematiska spiraler förekommer i naturen; det nya bygger på det gamla. En annan frågar plötsligt, om jag verkligen vågar påstå, att Gud skulle vara mate-

bidra med när mina elever skall skapa sig en världsbild!

Men är det överhuvudtaget möjligt att bidra till en annan människas eget skapande?

Knappast, om jag förväntar mig att mina elevers världsbild skall bli en kopia av min. För mig gäller det att hålla inne med mina snabba svar, ge eleverna tid och unna dem upptäckarglädje. Vid närmare eftertanke är arbetsuppgifterna ovan tämligen tillrättalagda. Men jag lär mig. Jag har glädjen att ha arbetskamrater att diskutera med. Vi lånar av varandra, vi plockar från fortbildningstillfällen, egna och varandras, tack och lov att ingen sätter copyright på ideerna!