

### ***Dularfulla leynispilið***

*Nemendur í 9. bekk sýna hvernig stærðfræði getur sprottið upp úr skemmtiverkefni. Hópur var að leika sér með spilagaldur. Smám saman fannst þeim galdurinn sjálfur einfaldur og ekki spennandi en fóru í staðinn að velta fyrir sér á hverju galdurinn byggðist. Í skólanum voru þeir hvattir til að athuga það skipulega. Hér sýna þeir hvernig þeir setja fram röksemdir sínar á almennu máli og með algebru. Þeir sýna hvernig þeir tengja þessi mál saman og hvernig þeir skynja samhengi og röksemdir. Viðræður og samskipti kennarans og nemendanna koma greinilega í ljós og það sést hve mikilvægt er að skrá skýrt og vandlega.*

### ***Kätketyn kortin arvoitus***

*Probleemanratkaisua pidetään tärkeänä työtapana pohjoismaisissa luokkahuoneissa. Korostamme oppilaiden tekemien tutkimusten, luovuuden ja yhteistyön merkitystä. Tämä artikkeli on kirjoitettu kahdesta 9. luokan oppilaasta. He osoittavat, miten matematiikka voi olla osa vapaa-ajan toimintaa. Yhdessä muiden kanssa he tekivät korttitemppuja. Vähitellen itse temppu ei enää hämmästyttänyt, mutta tällöin he halusivat tietää, miten se toimii. Koulussa heidät haastettiin tekemään systemaattisia tutkimuksia. Oppilaat suorittivat tutkimuksia ja muotoilivat perustelunsa sekä arkikielellä että matematiikan kielellä. He osoittivat, miten kielet voitiin yhdistää ja miten he näkivät yhteyksiä ja perusteluja omaan tietämykseensä nojautuen. He osoittivat, että oppilaiden ja opettajien välinen kommunikaatio on tärkeätä ja että kirjallinen dokumentaatio on merkityksellistä.*



Janne Hellenes, Gunn Hege Karlsen, elever i 9. klasse

## Mysteriet med det skjulte kort

Vi sitter på ei hytte på fjellet og imponerer folk med korttrikset vårt. Men det tar ikke så lang tid før ni stykker er lei av det samme korttrikset. Og til slutt begynner vi å lure på hvorfor dette trikset egentlig virker. Vi sitter og grubler på dette, på ei hytte langt inne på fjellet, og til slutt kommer vi også fram til et slags svar. Men når vi reiser, blir svaret liggende igjen etter oss.

Da vi så fikk en fri oppgave på skolen, begynte vi igjen å gruble: Hvordan var det nå

egentlig det korttrikset virket? Vi kunne jo ikke gå opp på fjellet og hente svaret som kanskje var borte, så vi måtte begynne på nytt. «Hvordan?» og «Hvorfor?» var de store spørsmålene.

Og så var vi igang igjen.

Finn fram kortstokken og bli med oss i jakten på svarene!

### Korttrikset

Vi bruker en vanlig kortstokk med 52 kort.

1. Legg et kort åpent på bordet og se på verdien. Eks: 8.
2. Legg nye kort oppå det første kortet med billedsiden opp. Tell kort opp til tretten (som er det høyeste kortet i bunken). Eks: (8)–9–10–11–12–13. Fem kort oppå åtterten.
3. Legg et nytt kort åpent på bordet. Eks: 10. Gjenta det samme som du gjorde under punkt 2, men nå må du begynne å telle på 11 i stedet for 9. Eks: (10)–11–12–13. Tre nye kort oppå tieren.
4. Fortsett slik til kortstokken er oppbrukt. Blir det noen ekstra kort på slutten, slik at bunken ikke går opp til tretten, legger du disse kortene vekk.
5. Lukk øynene og be en annen snu tre av bunkene med baksiden opp og samle sammen resten av kortene i ei bunke. (Også den bunken som eventuelt ikke gikk opp til tretten.)
6. Be ham nå snu det øverste kortet i to av bunkene som ligger med baksiden opp. Eks på åpne kort: 5 og 3.
7. Ta alle kortene som han samlet i en bunke og begynn å telle: Verdien av de to åpne kortene pluss ti.  $(5 + 3) + 10$ . Legg fem kort på bordet, tre kort og ti kort på bordet.
8. Antall kort du nå har igjen på hånda, er det samme som verdien på det øverste kortet i den siste bunken. Bare snu og se!

Vi satt og studerte korttrikset. Spesielt lurte vi på hvorfor vi måtte telle til ti når vi skulle finne verdien av det skjulte kortet. Man må jo telle opp så mange kort som verdien av de to åpne kortene, og så telle opp ti kort ekstra. Hvorfor ti?

### Janne får en idé

Vi drev og forsket litt på dette, og plutselig fant Janne ut en annen måte å gjøre korttrikset på.

I stedet for å telle til tretten på begynnelsen når man legger ut bunker, så kan man telle til tolv. Blir det første kortet i bunken 13, må man bare putte kortet inn i kortstokken igjen og ta et nytt kort. Deretter må man snu fire bunker i stedet for tre. Og når man skal finne verdien av det skjulte kortet, slipper man å telle opp ti

### Vi forteller med tall

Vi begynte å forklare læreren korttrikset for å få noe hjelp, men på grunn av hans lettere rustne hjerne tok dette litt lang tid. Etterhvert som han skjønnte mer av det vi gjorde, ga han oss den gode ideen å skrive opp hva vi gjorde – hvilke regnestykker som egentlig blir gjort i korttrikset med 40 kort.

- Vi skrev opp tallene på de åpne kortene. Første kolonne i tabellen under.
- Vi telte oss frem til hvor mange kort det var i hver av bunkene, og skrev opp tallene. Andre kolonne.
- Vi fant også ut at for å finne ut antall kort, kan vi ta 10 – som er det høyeste kortet i kortstokken – minus tallet på det åpne kortet (7, 5 eller 2). Siste kolonne.

Tall på åpne kort	Antall kort i bunken	Formel for antall kort i bunken
7	3	= 10 – 7
5	5	= 10 – 5
2	8	= 10 – 2

kort ekstra. Man kan bare telle opp så mange kort som verdien av de tre åpne kortene.

For å gjøre korttrikset enda lettere å arbeide med, fant vi ut at vi kunne ta ut alle billedkortene (konge, dronning og knekt). Da ble det færre kort, og mindre tall å forholde seg til. Nå er det høyeste kortet i bunken altså 10, og når man legger ut kortene i bunker på begynnelsen må man telle til ni. Blir det første kortet i en bunke 10, må man bare putte kortet inn i kortstokken igjen og ta et nytt kort.

Når du har tatt ut og snudd fire bunker og åpnet tre kort, sitter du og ser på tre åpne kort og et lukket. Hva skjuler seg under det lukkede kortet?

Det kan vi finne ut med å telle på måten vi skrev over. Men hvorfor stemmer dette?

Så skal vi begynne å telle for å finne ut hva som skjuler seg bak det fjerde kortet.

- Hele kortstokken inneholder nå 40 kort, siden vi har tatt vekk bildene.

Hvor mange av disse 40 kortene sitter vi igjen med på hånda og i den skjulte bunken?

Vi ser på hva vi har tatt bort:

- I bunken med kort 7 øverst, er det til sammen 10 – 7 kort
- I bunken med kort 5 øverst er det til sammen 10 – 5 kort
- I bunken med kort 2 øverst er det til sammen 10 – 2 kort
- Når vi teller og legger ned kort, trekker vi vekk syv, fem og to kort. Vi teller vekk samme antall kort som verdien av de åpne kortene.

Vi forteller det samme med tall og regnetegn:

$$40 - (10 - 7) - (10 - 5) - (10 - 2) - 7 - 5 - 2$$

Vi tar vekk parentesene:

$$40 - 10 + 7 - 10 + 5 - 10 + 2 - 7 - 5 - 2$$

Siden vi tar  $+ 7 + 5 + 2$  og  $- 7 - 5 - 2$  er dette lik null.

$$40 - 10 - 10 - 10 = 10$$

Det vi egentlig har gjort nå er å trekke bort kort slik at det vi sitter igjen med på hånda pluss kortene i den skjulte bunken er ti kort til sammen.

På hånda har vi nå til slutt tre kort. Det vil si at det er syv kort i den skjulte bunken. I en bunke med syv kort er en treer det øverste kortet i bunken. Helt i starten må vi ha lagt ut og telt slik på den bunken:

$$(3) - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 \text{ i alt syv kort.}$$

$$\text{Eller: } 10 - \text{skjult kort} = 7$$

Mysteriet om det skjulte kortet er løst.

### Slik blir det alltid

Formelen for antall kort i en bunke: 10 minus tallet på det åpne kortet. Eks:  $10 - 7 = 3$

Formelen for å finne verdien av det øverste kortet er da: 10 minus antall kort. Eks:  $10 - 3 = 7$

Altså tar vi bare nå:

$$10 - \text{kortene på hånda}$$

$$= \text{antall kort i den skjulte bunken.}$$

$$10 - \text{antall kort i den skjulte bunken}$$

$$= \text{verdien av det øverste skjulte kortet.}$$

Dette stemmer uansett hvilke tall de åpne kortene viser. De åpne kortene er altså variable.

Tall på åpne kort	Formel for antall kort i bunken
a	$= 10 - a$
b	$= 10 - b$
c	$= 10 - c$

$$40 - (10 - a) - (10 - b) - (10 - c) - a - b - c$$

$$40 - 10 + a - 10 + b - 10 + c - a - b - c$$

Siden vi tar  $+ a + b + c$  og  $- a - b - c$  er dette lik null

$$40 - 10 - 10 - 10 = 10$$

Nå har vi altså trukket bort kort slik at det vi sitter igjen med på hånda pluss kortene i den skjulte bunken er ti kort.

Det øverste kortet i skjult bunke har verdien d.

$$\text{Antall kort i skjult bunke: } 10 - d.$$

$$\text{Antall kort på hånda er e.}$$

$$\text{Antall kort på hånda:}$$

$$10 - (10 - d) = e$$

Vi løser opp parentesene:

$$10 - 10 + d = e$$

$$d = e$$

Det øverste kortet i bunken har samme verdi som antall kort på hånda.

### Det egentlige korttrikset

Vi skal nå med variable forklare korttrikset slik det egentlig er.

Antall kort igjen i skjult bunke og på hånda etter at vi har lagt ned kort:

Tall på åpne kort	Formel for antall kort i bunken
a	$= 14 - a$
b	$= 14 - b$

$$52 - (14 - a) - (14 - b) - a - b - 10$$

$$52 - 14 + a - 14 + b - a - b - 10$$

$$52 - 14 - 14 - 10 = 14$$

Antall kort i skjult bunke pluss antall kort på hånda er til sammen 14 kort. Hvorfor er trikset laget slik at man har akkurat 14 kort igjen til slutt? Hvorfor ikke 13?

Svaret er ganske enkelt: 14 dekker alle behov. Eks: Hvis ess (1) er det øverste kortet i bunken, inneholder bunken tretten kort til sammen, og man har ett kort på hånda.

$$13 + 1 = 14.$$

Hvis konge (13) er det øverste kortet, inneholder bunken til sammen ett kort, og man har da tretten kort på hånda.  $1 + 13 = 14$ .

Men hvorfor trekker man i tillegg vekk akkurat ti kort?

Dette svaret er også enkelt. Man trekker vekk ti kort fordi man vil sitte igjen med fjorten kort til slutt i den skjulte bunken pluss kortene på hånda.

Når man gjør korttrikset på vår forenklete måte trenger man ikke å telle opp ti kort ekstra på slutten. Grunnen til at korttrikset ikke ble laget på denne måten, er at man da slipper den ekstra regelen med å putte kongen (13) inn i kortstokken igjen hvis dette blir det første kortet i bunken.

### Interessant og utfordrende

Nå er vi endelig ferdige med å forklare deg dette korttrikset slik vi har arbeidet med det fra begynnelse til slutt. Håper du har fått noen nye interessante kunnskaper. Hvis ikke har jo hele dette vanskelige, utfordrende arbeidet vært forgjeves. Eller ikke helt, for uansett har det vært et interessant og utfordrende arbeid for oss – litt utenom de vanlig matematikktimene.



*Janne til høyre og Gunn Hege til venstre.*