***Á fullum hraða og hemlum svo***

*Greinin segir frá reynslu kennaranema af gerð stærðfræðilíkana. Þeir smíðuðu líkan og notuðu síðan til þess að athuga staðhæfingu sem ætlað var að reyna að fá ökumenn til þess að virða hraðatakmarkanirnar 50 km/klst. í þéttbýli. Út frá þessari vinnu kennaranemanna er fjallað um mikilvæga þætti í líkanasmíð, greiningu og gagnrýni á líkön. Að lokum er athygli beint að almennri menntun í stærðfræði og hvaða hlutverki hæfnin til þess að smíða stærðfræðilíkön eigi að gegna innan hennar.*

***Täyttä vauhtia eteenpäin ja jarrut päälle***

*Artikkelin lähtökohtana ovat kokemukset opettajankoulutuksessa käytetystä mallintamisprosessista, jossa opettajaksi opiskelevat rakensivat ja analysoivat matemaattisen mallin tanskalaisen liikennekampanjan väittämästä, jolla pyrittiin pitämään 50 km/t nopeusrajoitus taajamissa. Artikkelissa kuvataan niitä elementtejä, jotka ovat välttämättömiä matemaattisen mallin rakentamiseen, analyysiin ja kritiikkiin. Lopuksi käsitellään sitä roolia, joka mallintamiskompetenssin kehittämisellä tulisi olla yleissivistävässä matematiikan opetuksessa.*

Morten Blomhøj

# Fuld fart frem og bremsen i

**10 = 44 – du rammer hårdere end du tror**
For nogle år siden lancerede Rådet for Større Færdselssikkerhed en kampagne med overskriften „10 = 44 – Du rammer hårdere end du tror". Kampagneplakaten viste et billede af en tilsyneladende død pige med „10 = 44" skrevet med rødt i panden. Efter nogen tid blev der indrykket annoncer i aviserne, der forklarede baggrunden for kampagnens slogan. Historien var som følger:

*En bil, der kører 50 km/t, overhales af en bil, der kører 60 km/t. Da bilerne er lige ud for hinanden, løber en pige ud på vejen et stykke foran. De to førere reagerer lige hurtigt og bilerne bremser lige godt. Bilen, der kører 50 km/t, når netop at standse, inden den rammer pigen. Men den anden rammer hende med 44 km/t. 9 ud af 10 dør af en sådan påkørsel.*

Kampagnens påstand giver anledning til undren hos læseren. Den stemmer ikke helt overens med vores intuition. Kan det virkelig passe, at en overskridelse af hastighedsbegrænsningen med 10 km/t kan betyde så meget? Hvordan er man nået frem til dette resultat, er det baseret på målinger eller er det noget man har regnet sig frem til? Gælder det altid – det afhænger vel også af andre forhold – vejbanens beskaffenhed f.eks.?

Hvis man vil kontrollere kampagnens påstand, kan man gøre det ved at opstille en matematisk model, der gør det muligt at regne på, hvordan bilernes hastigheder og dermed deres positioner ændrer sig under opbremsningen.

**Et modelleringsforløb i læreruddannelsen**
Denne problemstilling var en blandt flere udgangspunkter for de studerendes arbejde med matematisk modellering i et forløb på Skive Seminarium i efteråret 1999[1]. Med udgangspunkt i erfaringer fra dette forløb viser jeg i det følgende, hvilke forskellige elementer der kan indgå i en sådan modelleringsproces.

En mulig første tilgang til opstilling af en model over det fænomen, der beskrives i kampagnen, kan være at formulere påstanden i annonceteksten og sigtet med at opstille en matematisk model i ens eget sprog. Det kan f.eks. føre til følgende sætninger:

*Den bil, der kører hurtigst må selvfølgelig nå hen til pigen først. Bilerne når altså ikke hen til pigen på samme tid. Afstanden til pigen i det øjeblik, hvor bilerne er lige ud for hinanden, svarer altså til den strækning, som den første bil skal bruge til at standse. Vi skal beregne, hvor hurtigt den anden bil kører på det sted, hvor den første bil netop er stoppet.*

[1] Det drejede sig om et forløb på 4. årgang af et liniefagshold. Forløbet var tilrettelagt af holdets matematiklærer Troels Lange i samarbejde med psykolog Rigmor Gade ligeledes Skive Seminarium og forfatteren. Jeg vil benytte lejligheden til at takke for et godt samarbejde og sige tak til holdet for deres positive medvirken.

En sproglig bearbejdelse er et vigtigt element i en matematisk modelleringsproces i en undervisningssituation. Selve formuleringen af formålet bidrager ofte til en personliggørelse af sigtet med at opstille modellen. Samtidig sker der er en vigtig første strukturering af problemsituationen gennem den sproglige formulering. Der lægges normalt ikke megen vægt på betydningen af en sproglig bearbejdelse i skolens matematikundervisning. Men i forbindelse med modellering er der brug for øget fokus på den sproglige side af faget, og hermed er der en anledning til tværfagligt samarbejde med modersmålsundervisningen.

For at komme videre med modelopstillingen er det nødvendigt at overveje, hvilke forhold der skal indgå i modellen. Kampagnens påstand er generel og det er derfor rimeligt at se bort fra specielle forhold som f.eks. vejens beskaffenhed og førernes køreegenskaber. Man kan således antage, at bilernes opbremsning kan beskrives alene ved den tid, der går, fra førerne ser pigen, til de begynder at bremse og bilernes bremseevne. Bilerne antages kun at adskille sig fra hinanden ved deres hastighed på det tidspunkt, hvor førerne ser pigen.

Sådanne antagelser må naturligvis baseres på en viden om det fænomen, som modellen skal beskrive. For den kyndige bilist er det klart, at der går et lille øjeblik, fra føreren opdager pigen, til han træder på bremsen – det er det, der i teoriundervisningen til køreprøven kaldes for reaktionstiden. Der er imidlertid forskel på at have en viden om det fænomen, som man ønsker at beskrive ved hjælp af en matematisk model og så til at kunne bringe denne viden i spil i modelleringsprocessen. Samspil mellem forskellige former for viden og erfaringer er således central i forbindelse med modelleringskompetence.

De valg, man gør i forbindelse med afgrænsning af modellen, har konsekvenser for modellens anvendelighed. Med ovenstående antagelser kan modellen således ikke forventes med nogen særlig præcision at kunne beregne, hvordan en konkret opbremsning vil forløbe. Den enkelte opbremsning vil netop være afhængig af de lokale vejforhold og førerens køreegenskaber. Refleksion over sammenhængen mellem de grundlæggende modelantagelser og modellens anvendelsesområde er også et element i arbejdet med matematisk modellering.

Næste skridt i processen er at give en matematisk beskrivelse af, hvordan bilernes hastigheder ændrer sig, fra det øjeblik førerne ser pigen. Under reaktionstiden er det rimeligt at antage, at bilernes hastigheder ikke ændrer sig. Det svarer til, at bilerne kører med konstant hastighed på det tidspunkt førerne opdager pigen – de er altså ikke midt i en acceleration eller en opbremsning. Når først bremsen er aktiveret, kan man antage, at hastigheden aftager lineært med tiden – svarende til, at opbremsningen foregår med konstant acceleration. Hvilket blandt andet indebærer en antagelse om, at hjulene ikke blokerer under opbremsningen.

For at man kan regne på modellen, skal disse antagelser „matematiseres". Det kan gøres ved at udnytte differential- og integralregning, og sammenhængen mellem acceleration, hastighed og stedfunktion. Men en sådan tilgang kræver faglige forudsætninger i matematik og fysik svarende til gymnasiets højeste niveau.

En anden mulighed er at tænke i, hvordan bilernes hastigheder – og dermed deres position – ændrer sig i løbet af et lille tidsinterval $\Delta t$, og på den baggrund opstille formler, der beskriver ændringerne i disse størrelser skridt for skridt. En sådan tilgang er baseret på matematiske begreber og metoder, der *kan* behandles i folkeskolens matematikundervisning. Til gengæld kræver det anvendelse af edb, når man ud fra de opstillede formler skridt for skridt skal beregne bilernes positioner under opbremsningen. Viden om mulighederne for, hvordan sådanne beregninger kan foretages ved hjælp af en computer, er således en forudsætning for bevidst at kunne vælge denne tilgang.

Inden man kan matematisere antagelserne er det nødvendigt at indføre passende symbolske betegnelser for de størrelser, der indgår i modellen. I undervisningssammenhæng er der ofte særlige vanskeligheder knyttet til netop dette element i modelleringsprocessen. Det kræver nemlig erfaring og en struktureret tankegang at indføre symboler, inden man har overblik over, hvilke matematiske formler symbolerne skal indgå i.

I denne situation lader vi t betegne tiden (målt i sekunder) fra det øjeblik førerne opdager pigen. $t = 0$ svarer altså til dette tidspunkt. $t_{reak}$ betegner reaktionstiden, og bilerne begynder altså at bremse til tiden $t = t_{reak}$. Bilernes hastighed til tiden $t$ kalder vi for henholdsvis $V_1(t)$ og $V_2(t)$ (måles i m/sek.) og deres position målt i meter fra det sted, hvor bilerne var til tiden $t = 0$, kalder vi for $S_1(t)$ og $S_2(t)$.

Inden bilerne begynder at bremse har vi dermed, at

$$V_1(t_{reak}) = V_1(0) = 50 \text{ km/time} = 13{,}9 \text{ m/sek.}$$

og at

$$V_2(t_{reak}) = V_2(0) = 60 \text{ km/time} = 16{,}7 \text{ m/sek.}$$

Efter at bilerne er begyndt at bremse ($t > t_{reak}$) gælder for begge biler, at

$$V(t + \Delta t) = V(t) - b \cdot \Delta t$$

hvor $b$ (måles i m/sek.) er den acceleration, der bremses med. Denne formel beskriver en ret linie med hældningen $-b$. Liniens placering fastlægges af begyndelsesbetingelsen. For bil 1's vedkommende går linien gennem punktet ($t_{reak}$, 13.9). En sådan ligning kaldes generelt for en differensligning, fordi den angiver forskellen mellem funktionsværdier til to forskellige tidspunkter: $V(t + \Delta t) - V(t) = -b \cdot \Delta t$.

For at kunne besvare det spørgsmål, vi har formuleret, er det også nødvendigt at kunne beregne, hvordan bilernes position ændrer sig under opbremsningen. Her kan vi imidlertid bruge det samme strukturende greb, nemlig at opstille en formel for den strækning bilerne kører i løbet af et lille tidsinterval, $\Delta t$. Når $\Delta t$ er passende lille, kan vi regne som om, hastighederne af de to biler er konstante i dette interval. Med denne tilnærmelse får vi følgende differensligning for, hvor langt der køres på $\Delta t$ sek.:

$$S(t + \Delta t) \approx S(t) + v(t) \cdot \Delta t$$

Formlen siger, at til tiden $t + \Delta t$ har bilen kørt det stykke den havde kørt til tiden $t$, plus det stykke, den har kørt i løbet af de sidste $\Delta t$ sekunder, når vi antager at hastigheden har været konstant, $v(t)$, i denne periode. Vi ved jo, at bilernes hastigheder aftager under opbremsningen, så det er oplagt, at vi begår en lille fejl som gør, at vi overvurder er bilernes bremselængde, når vi regner på denne måde. Det er samtidig oplagt, at jo mindre vi vælger $\Delta t$ jo mindre en fejl begår vi.

Sådanne overvejelser om præcisionen af de metoder, der anvendes i forbindelse med analyse af en matematikmodel, er et vigtigt element i en matematisk modelleringsproces.

De formler, vi nu har opstillet, giver ikke umiddelbart svar på spørgsmålet, om hvor hurtigt den anden bil kører i det øjeblik den rammer pigen. Men vi kan bruge formlerne til skridt for skridt at beregne bilernes hastigheder og deres positioner, og vi har hermed opstillet en matematisk model af den situation, der beskrives i kampagnen.

Hvis man skal udføre beregningerne i hånden, er det imidlertid en noget tidskrævende proces. Vi kender hverken reaktionstiden eller bremseevnen, og derfor vil vi have brug for at foretage de samme beregninger flere gange med forskellige værdier af $t_{reak}$ og $b$. Disse parametre må formodes at påvirke modellens beregning af påkørselshastigheden, og en mulig anvendelse af modellen kunne netop være at undersøge, om der findes realistiske værdier af $t_{reak}$ og $b$, hvor modellens resultater er i overensstemmelse med påstanden i kampagnen. Det er derfor værd at overveje, hvordan vi kan få modellen omsat til et computerprogram. I denne sammenhæng er det oplagt at bruge et

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| tidsskridt (sek.): | 0,10 | v1(0) (km/time): | 50 | |
| reaktiontid (sek.): | 1,50 | v2(0) (km/time): | 60 | |
| bremseevne (m/sek.^2) | 8,00 | | | |

| tid (sek.) | v1 (m/sek.) | s1 (m) | v2 (m/sek.) | s2 (m) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 13,89 | 0,00 | 16,67 | 0,00 |
| 1,50 | 13,89 | 20,83 | 16,67 | 25,00 |
| 1,60 | 13,09 | 22,22 | 15,87 | 26,67 |
| 1,70 | 12,29 | 23,53 | 15,07 | 28,25 |
| 1,80 | 11,49 | 24,76 | 14,27 | 29,76 |
| 1,90 | 10,69 | 25,91 | 13,47 | 31,19 |
| 2,00 | 9,89 | 26,98 | 12,67 | 32,53 |
| 2,10 | 9,09 | 27,97 | 11,87 | 33,80 |
| 2,20 | 8,29 | 28,88 | 11,07 | 34,99 |
| 2,30 | 7,49 | 29,70 | 10,27 | 36,09 |
| 2,40 | 6,69 | 30,45 | 9,47 | 37,12 |
| 2,50 | 5,89 | 31,12 | 8,67 | 38,07 |
| 2,60 | 5,09 | 31,71 | 7,87 | 38,93 |
| 2,70 | 4,29 | 32,22 | 7,07 | 39,72 |
| 2,80 | 3,49 | 32,65 | 6,27 | 40,43 |
| 2,90 | 2,69 | 33,00 | 5,47 | 41,05 |
| 3,00 | 1,89 | 33,27 | 4,67 | 41,60 |
| 3,10 | 1,09 | 33,46 | 3,87 | 42,07 |
| 3,20 | 0,29 | 33,56 | 3,07 | 42,45 |
| 3,30 | -0,51 | 33,59 | 2,27 | 42,76 |

Formlen i B8 er: C8$f$1/3,6
Formlen i C7 er: C8B7*$C$2
Tilsvarende for D7 og E7.
Formlen i B8 er: C8B7-$C$3*$C$1
Denne formel er kopieret i B- og D-søjlen fra og med celle 9.
Formlen i C8 er: =C7+B7*$C$1
Denne formel er kopieret i C- og E-søjlen fra og med celle 9.

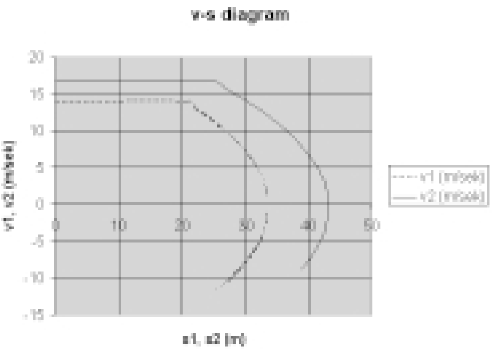
regneark, fordi formlerne netop fortæller, hvordan hastighederne og positionerne ændrer sig skridt for skridt. En sådan sammenhæng kan repræsenteres i et regneark ved at lave en søjle til hver af de indgående variable, og ved i hver række at beregne tiden *t* og bilernes hastigheder og positioner til dette tidspunkt. Her er gengivet et sådant regneark lavet i Excel af to lærerstuderende i forbindelse med forløbet på Skive Seminarium.

Det er værd at understrege, at alle de mange overvejelser og refleksioner vedrørende modellens opbygning ikke blev foretaget i den velordnede rækkefølge, de er blevet præsenteret i forud for opstillingen af regnearket. Som det er karakteristisk for matematisk modellering, har der derimod været tale om en cyklisk proces, hvor forskellige ideer og antagelser blev diskuteret samtidig med udviklingen af regnearket, der således blev lavet om flere gange i processen.

Så snart modellens ligninger er repræsenteret i et regneark kan man eksperimentere med modellen. For hvert valg af værdier for reaktionstid og bremseevne kan regnearket beregne forløbet af opbremsningen. Realistiske værdier for reaktionstiden ligger nok i intervallet 0,5–1,5 sek., mens bremseevnen ligger mellem 6,8 m/sek$^2$, der er lovens krav til, hvor godt en bil skal kunne bremse, og 9,8 m/sek$^2$, der er den fysiske grænse for, hvor godt en bil kan bremse ved hjælp af friktion mod vejen. Hvis vejen er vandret, kan friktionskraften nemlig ikke overstige den kraft, der trykker bilen ned mod vejen og det er jo tyngdekraften.

I det viste regneark er $t_{reak}$ sat til 1,5 sek. og *b* til 8 m/sek$^2$. Ved at analysere tallene i arket kan man se, at bil 1 stopper efter 33,6 meter. Det er altså her pigen står i dette tilfælde. Med andre værdier ville pigen stå et andet sted! Ved at gå ind i søjle E kan vi finde ud af, hvornår bil 2 passerer dette sted. Vi kan se, at det sker efter ca. 2,05 sek. På dette tidspunkt er hastigheden af bil 2 omkring 12 m/sek., hvilket svarer til 43,3 km/time. Med disse værdier er der altså rimelig overensstemmelse mellem modellens resultater og kampagnens påstand. Værdierne $t_{reak} = 1{,}5$ sek. og $b$ til 8 m/sek.$^2$ er netop bestemt ved at eksperimentere med modellen for at få resultaterne til at passe med kampagnens påstand.

Det er oplagt at repræsentere modellens resultater grafisk. Det kan f.eks. gøres ved at plotte sammenhørende værdier af bilernes position og hastighed. Sådanne grafer viser altså, hvor stærkt bilerne kører på forskellige steder under opbremsningen.




Udfra figuren kan man se, at bil 1 stopper efter ca. 34 meter. Her er dens hastighed nemlig 0, og det er altså her pigen står. Den hastighed, som bil 2 rammer pigen med, kan aflæses direkte af grafen som V2 svarende til sted hvor V1 = 0.

Spørgsmålet om, hvorvidt påstanden i kampagnen holder, kan nu formuleres inden for modellen som et spørgsmål om, hvorvidt en reaktionstid på 1,5 sek. og en bremseevne på 8 m/sek$^2$ er realistiske værdier. De lærerstuderende havde bl.a. denne vurdering:

*En reaktionstid på 1,5 sek. er nok lige i overkanten for bilister, der ikke er påvirket af spiritus eller andet. En bremseevne på 8 m/sek$^2$ er til gengæld nok en rimelig antagelse.*

Hvis man vælger at sætte reaktionstiden til 1 sek. i stedet for 1,5 sek., rammer bil 2 pigen med ca. 41 km/t, hvilket jo også er en ganske høj fart at blive påkørt med. Som overordnet konklusion kan vi altså slå fast, at vores model bekræfter påstanden i kampagnen om, at en overskridelse af hastighedsbegrænsningen i byer med 10 km/time har dramatiske konsekvenser for den hastighed, hvormed man rammer forhindringer, der viser sig 30-35 meter forude. Modellens resultater kan således bruges som argument for hastighedsbegrænsning i byerne på 50 km/time. Inden man anvender modellen i en sådan sammenhæng, bør den imidlertid afprøves empirisk.

I modellen fortsætter „opbremsningen" efter V1 er blevet 0, således at hastigheden bliver negativ. Det vil svare til, at bilen begynder at bakke, når blot man træder længe nok på bremsen. Det er naturligvis ikke i overensstemmelse med virkeligheden og fænomenet skyldes, at formlen for, hvordan hastigheden ændrer sig, kun er en rimelig beskrivelse af virkeligheden, så længe hastigheden er større end 0.

Ved hjælp af regnearket kan man relativt let undersøge, hvordan ændringer i parameterværdierne påvirker modellens resultater. Følgende citat fra en af rapporterne fra forløbet viser, at sådanne undersøgelser kan føre til et overraskende resultat:

*Vi har eksperimenteret med modellen og fundet ud af, at den hastighed, som bil nr. 2 rammer pigen med, vokser, når vi sætter reaktionstiden op og når vi sætter bremseevnen op. Men når vi ændrer på disse størrelser, betyder det også, at pigen står et andet sted. Det er selvfølgelig bedst at have gode bremser.*

Sætter man således $b = 9{,}8$ m/sek$^2$ og $t_{reak} = 1{,}5$ sek. får man, at bil 2 rammer pigen med ca. 46 km/t. Fænomenet skyldes, at afstanden til pigen bliver mindre, når bremseevnen sættes op. Bil 2 får dermed et kortere vejstykke at bremse på.

Vi ved, at skridtlængden Dt har betydning for modellens resultater. Vi bør derfor også undersøge, hvor lille $\Delta t$ skal være, hvis vi ønsker at kunne bestemme påkørselshastigheden med f.eks. en decimals nøjagtighed. Det kan gøres ved at undersøge, hvordan resultaterne ændrer sig, når vi sætter skridtlængden ned. Det viser sig faktisk, at vi skal helt ned på en skridtlængde på 1/100 sek. for at få en sådan præcision.

## Modelleringskompetence og almendannelse

Som eksemplet viser er det at kunne opstille, analysere og kritisere matematiske modeller en sammensat og kompleks kompetence. Modelleringskompetence indbefatter evne til at kunne formulere, afgrænse og strukturere en problemstilling således, at den kan gøres til genstand for matematisk behandling, samt evne til at kunne foretage en sådan matematisering. Her er det nødvendigt at kunne trække på en forståelse af de involverede matematiske begreber, men evne til at opstille matematiske modeller kan ikke udvikles alene gennem arbejde med de faglige begreber. Det kræver, at der tilstrækkelig ofte arbejdes med problemsituationer, der udfordrer disse evner.

Modelleringskompetence omfatter også evne til at kunne foretage en relevant analyse af en model ved hjælp af f.eks. numeriske, grafiske og analytiske metoder. Som i eksemplet er det her ofte en forudsætning, at man behersker relevante edb-værktøjer.

Det selv at have opstillet en matematisk model medfører ikke af sig selv, at man kan fortolke, vurdere og kritisere modellens resultater på en relevant måde. Sådanne evner må udvikles gennem at praktisere fortolkning og kritik i forskellige modelleringssituationer (Blomhøj, 1992).

Vi lever i et samfund, der udvikler sig i en retning, hvor opstilling og anvendelse af matematiske modeller spiller en stadig mere fremtrædende rolle. Det gælder inden for udvikling og anvendelse af teknologi i produktionen og det gælder brug af matematiske modeller i forbindelse med samfundsmæssige problemstillinger. Af aktuelle eksempler på anvendelse af matematiske modeller i forbindelse med samfundsmæssige problemer kan nævnes: trafikprognoser og modeller for vandgennemstrømningen i forbindelse med beslutningen om Øresundsforbindelsen, risikovurdering som grundlag for bekæmpelse af salmonellainfektioner fra fødevarer, dokumentationen af faldende sædkvalitet hos mænd, indsatsen over for forurening af vandmiljøet med næringsstoffer, vurdering af AIDS-epidemiens omfang, teorien om menneskeskabte påvirkninger af det globale klima.

Brugen af matematiske modeller spiller i disse sammenhænge en afgørende rolle for, at problemerne opdages og tematiseres som samfundsmæssige problemer.

Ifølge den tyske sociolog Ulrik Beck (Beck, 1997) udvikler det moderne højteknologiske samfund sig i retning af et risikosamfund, hvor det afgørende spørgsmål lyder:

*Hvordan kan man forhindre, uskadeliggøre, dramatisere og kanalisere de risici og farer, som systematisk skabes i den højtudviklede moderniseringsproces? … Det drejer sig ikke længere udelukkende om nyttiggørelse af naturen, om menneskets befrielse fra det traditionelle samfunds tvang, men derimod også – og væsentligst – om selve den teknologiske og økonomiske udviklings følgeproblemer.* (Beck, 1997, s. 28)

Det dominerende problem i risikosamfundet handler om at kunne optimere håndteringen af de risici, som den højteknologiske modernisering medfører i forhold til givne interessekonflikter. Videnskaberne og i særdeleshed matematik spiller en vigtig rolle i denne proces, fordi det er gennem videnskabeligt forklarede årsagssammenhænge blandt andet i form af matematiske modeller, at de samfundsskabte risici bliver en samfundsmæssig og politisk realitet. Og det er de videnskabelige analyser af problemerne, der skal producere forslag til håndtering af disse risici. De samfundsskabte risici bliver med rette eller urette gjort til genstand for sammenligning og kvantificering gennem matematisk modellering.

I et sådant samfund er det oplagt, at matematik er en vigtig faktor. Ethvert forsøg på at kvantificere, forudsige og konsekvensberegne mulige reguleringer af de risici, som samfundet producerer, kræver anvendelse af matematik i form af matematiske modeller. Modelleringskompetence og herunder faglig kritisk dømmekraft over for brugen af matematiske modeller bliver hermed af betydning for fastholdelse og udvikling af vores demokrati.

Det er derfor vigtigt at overveje, hvordan matematikundervisning kan bidrage til at udvikle kompetencer, der er relevante både for det enkelte individs aktive deltagelse i samfundet og for samfundets behov for uddannelse af kvalificeret arbejdskraft.

Hvis man med almendannelse forstår uddannelse, der skal være af værdi for et liv levet under almindelige livsbetingelser, er det for mig at se, oplagt at udvikling af modelleringskompetence må være en central del af matematikundervisningens bidrag til almendannelse i det moderne, højteknologiske samfund.

Både for kommende eksperter og kommende lægflok er kendskab til begrebet matematisk model og personlige erfaringer med selv at opstille, analysere og kritisere matematiske modeller i simple problemsituationer et værdifuldt bidrag til almendannelse.

## Modellering i skolens matematikundervisning

Men betyder det så, at vi skal til at undervise i den slags matematik, der indgår i de matematiske modeller, der bruges i samfundet? Nej, det betyder det ikke, og det er under alle omstændigheder illusorisk at tro, at vi gennem folkeskolens matematikundervisning og matematikundervisningen i ungdomsuddannelserne kan udvikle de nødvendige faglige forudsætninger for at almindelige elever skal kunne forstå og kritisere indholdet i avancerede matematiske modeller, der anvendes i forbindelse med samfundsmæssige problemstillinger.

Det betyder derimod, at tilegnelsen af grundlæggende matematiske begreber og metoder, som vi kender fra folkeskolens matematikundervisning, skal ske med henblik på, at eleverne bliver i stand til selvstændigt at anvende deres matematiske viden over for spørgsmål og problemer, de møder uden for matematikundervisningen. Og at der skal arbejdes målrettet på at udvikle elevernes mulighed for at reflektere over brugen af matematik i simple problemsituationer. Hvis sådanne intentioner skal realiseres, kræver det, at der i matematikundervisningen tilstrækkeligt ofte skabes situationer, hvor eleverne faktisk arbejder med at opstille og analysere simple matematiske modeller.

Eksemplet med fartkampagnen viser, at der i arbejdet med modellering også kan være behov for at indføre nye matematiske begreber som f.eks. differensligninger. Dette begreb er et stærkt redskab til modellering af dynamiske fænomener og samtidig kan det udgøre et fundament for eventuel efterfølgende tilegnelse af differentialregningens begreber. Ligeledes er en egentlig integration af edb ofte også en forudsætning for at kunne arbejde med modellering i matematikundervisning. Øget fokus på modellering medfører altså også nye udfordringer med hensyn til valg af fagligt indhold i skolens matematikundervisning (Blomhøj, 1993).

Det er endvidere en afgørende forudsætning, at der kan afsættes tilstrækkelig tid til sammenhængende modelleringsforløb. Det er nok nødvendigt at udnytte andre former for organisering af undervisningen end det traditionelle lektionsopdelte skema, hvis der skal arbejdes seriøst med matematisk modellering i skolens matematikundervisning.

Men det vigtigste er, at lærerne gennem deres grund- og efteruddannelse får mulighed for selv at udvikle modelleringskompetence og for at overveje de didaktiske muligheder og vanskeligheder i forbindelse med modellering i skolens matematikundervisning.

Erfaringerne fra forløbet i læreruddannelsen viste, at de lærerstuderende fandt det meget relevant og spændende at arbejde med matematisk modellering og at deres erfaringer gav et godt grundlag for didaktiske refleksioner over arbejdet med modellering i skolens matematikundervisning.

Slip bremsen og sæt fuld fart på modellering i matematikundervisningen.

Note: Artiklen er skrevet i tilknytning til projektet *Edb's betydning for læring og undervisning i matematik* under *Center for Forskning i Matematiklæring.*

**Referencer:**

Beck, U. (1997): *Risikosamfundet – på vej mod en ny modernitet.* Hans Reitzels forlag, København. (Første tyske udgave 1986).

Blomhøj, M. (1992): *Modellering i den elementære matematikundervisning – et didaktisk problemfelt*. Tekst MI 58, Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole.

Blomhøj, M. (1993): Modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber. *Nordisk MatematikkDidaktikk*, nr. 1, s. 16–37.