

Anne Berit Fuglestad

Elektroniske arbeidsark i Cabri

Dynamisk geometri – her er det noe i bevegelse. Vi kan flytte på figurer eller dra i dem, forandre form eller størrelser. Vi starter i utgangspunktet med frie objekter: punkt, linje, linjestykker, sirkler og lignende. Disse kan flyttes fritt og forandre størrelse. Andre objekter konstrueres på grunnlag av disse, som skjæringspunkter, normaler på linjer eller punkt på et annet objekt. Noen av disse blir fast bestemt av konstruksjonen men andre kan flyttes i begrenset grad, som for eksempel punkt på en sirkel (punkt på objekt) kan bare flyttes på sirkelen. Konstruerte normaler, midtpunkt, sirkler følger med og er fortsatt normaler, midtpunkt og sirkler etter flytting. I denne artikkelen bruker jeg Cabri i eksemplene og viser til menyer i dette programmet. Vi finner lignende muligheter i andre programmer, som Geometers Sketchpad, Cinderella, Geonext og andre.


Dynamisk geometri gir gode muligheter for å legge opp undervisningen slik at elevene selv får anledning til å eksperimentere både med geometriske egenskaper og med sammenhenger mellom størrelser i geometriske modeller.

Anne Berit Fuglestad er høgskoledosent ved Høgskolen i Agder, abf@hib.no

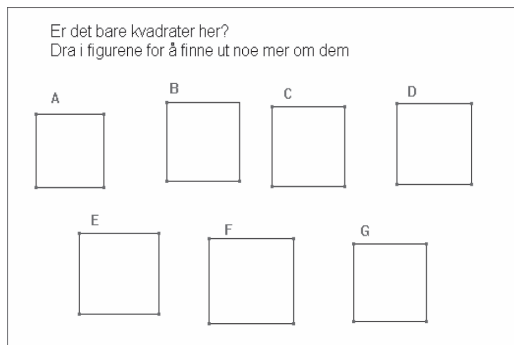
I konstruksjoner med papir og blyant kan det ofte være vanskelig å se om en konstruksjon er korrekt utført. Ved å dra i figuren konstruert i Cabri vil det fort avsløres om den henger sammen.

I en artikkel i Tangenten nr. 2 (03) har jeg omtalt Elektroniske arbeidsark i Excel. Det er mulig å tenke på lignende måte med dynamisk geometri for å gi en problemstilling å arbeide med. Arbeidsarket kan gi en start på et problem uten at elevene trenger å gjøre konstruksjonene. Figurene viser utdrag av arbeidsark som omtales. Cabri-filene for disse kan lastes ned fra www.caspar.no/tangenten/2005/cabri.zip.

I noen tilfeller passer det godt å lage en ferdig eller halvferdig konstruksjon som elevene skal eksperimentere med for å gjøre seg kjent med de geometriske egenskapene figurene har eller undersøke sammenhenger. Fokus kan være på egenskaper ved figurene som skal utforskes mer enn konstruksjonen som bygger den opp. I slike tilfeller kan en ferdig figur være god å arbeide med, og så kan elevene senere få utfordringen å konstruere dem selv. Det er også mulig å legge forklarende tekster på arket for kommentarer eller oppgavetekster. Menyvalget 'Skriv kommentarer'

tar' brukes til å sette inn tekstboks. Tekstboksen kan formateres ved å dra i den til den får passende størrelse. Husk å klikke på  pekeren (pila) etterpå.

Firkanter og kvadrater



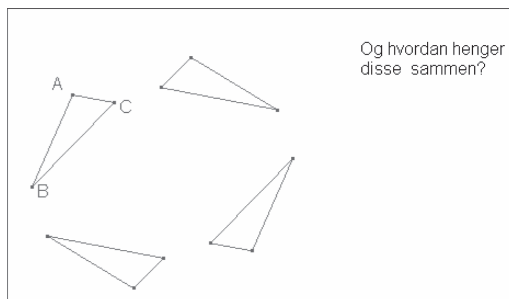
Er alle disse firkantene kvadrater? Se [Arbark-Firkanter.fig](#). Ved å dra i figurene får vi avslørt at det ikke er bare kvadrater, men forskjellige egenskaper ved firkantene. For å forstå et begrep og kunne skille det fra andre trengs det erfaringer med begrepet, både objekter som passer inn og de som ikke passer inn under begrepet. Elevene får nyttige erfaringer gjennom utforsking av hvilke egenskaper de har og ikke har. En utfordring videre kan være å konstruere de forskjellige firkantene.

En slik utforskningsoppgave der elevene kan dra i figurene for å undersøke sammenhenger, kan gi en første innføring i bruk av Cabri. Denne oppgaven er også omtalt i en artikkel i Tangenten tidligere [2] der tema er hvordan konstruktivistisk syn på læring gir utslag i valg av dataprogrammer og oppgaver.

Speilinger

På arbeidsarket [ArbarkSpeil.fig](#) er det figurer som henger sammen etter bestemte regler. Det er mulig å dra i punktene A, B og C på en av trekantene og de andre følger med. Hvilke regler følger de?

Kan vi beskrive hvordan de henger sammen? Her er tanken at elevene skal eksperimentere og finne fram til sammenhengen og oppdage speilingslinjene. Her bruker vi menyvalget skjul/vis for å gjøre speilingslinjene usynlige. Det er på knappen helt til høyre i menyen.



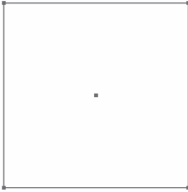
Trekanten ABC speiles i en eller flere linjer. Figuren viser hvordan det ser ut med linjer normalt på hverandre. Med hensikt er speilingslinjene skjult her, slik at ikke løsningen gis direkte.

En nytt spørsmål kan være å be dem finne speilingslinjene. Dette er ikke lagt inn i arbeidsarket fordi det ville fortelle at dette er speiling, og dermed får ikke elevene oppdage det selv. Her tror jeg det er viktig å balansere informasjonen som gis direkte slik at vi ikke tar bort utfordringen for elevene.


Firkanter og sirkler

Et arbeidsark om sirkler og firkanter ([Arbark-OmSirk.fig](#)) er laget etter inspirasjon fra en artikkel av Hölzl [4]. Midtnormalene for en trekant skjærer hverandre i ett punkt, og det gir sentrum i den omskrevne sirkelen, den som går gjennom alle tre hjørnene i trekanten. Elevene så ikke noe behov for å begrunne eller bevise dette siden Cabri viser at det opplagt er slik. Ved å gi en mer åpen oppgave – å studere omskrevne sirkler for en firkant - ble det en helt annen oppgave, kanskje vanskeligere men mer stimulerende. Case-studien som Hölzl

Om sirkler og firkanter



Konstruer en sirkel som går gjennom alle hjørnene i dette kvadratet.



Kan du gjøre det samme for rektangelet?

Se litt lenger nede

de kan gjøre det samme for denne. Bare første delen av arbeidsarket vises her.

En metode for å løse den første oppgaven i arbeidsarket kan være å bruke diagonalene. Dette viser seg ikke å fungere for den generelle firkanter. Så kommer spørsmålet om det går an i det hele tatt.

Jeg har lagt inn et siste tips – at det fins helt sikkert noen firkanter som har en omskrevet sirkel. Her er firkanter laget slik at hjørnene er på sirkelen. Oppgaven blir å finne ut mer. Her kan tips om å se på vinkler være aktuelt. Men det er ikke sikkert det er lurt å

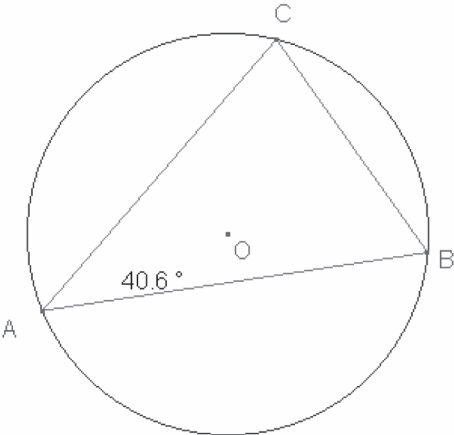
beskriver viser at det fører til større engasjement og dypere utforskning av oppgaven.

Arbeidsarket ([ArbarkOmSirk.fig](#)) er lagt opp slik at elevene først ser på kvadrat og rektangel for å komme i gang. Lenger ned på arket kommer en annen firkant med spørsmål om

legge alle slike tips inn i arbeidsarket. Det er alltid en fare for at elevene leter seg fram til alle tips først og ikke får gleden av å oppdage sammenhengen selv. Det kan være en bedre strategi å holde noen spørsmål og nye utfordringer i reserve. Kanskje elevene selv kommer



Sirkler og vinkler



Hjørnene i sirkelen kan flyttes på trekanten.

Sette mål på en vinkel gjøres med menyvalget Vinkel på tredje knapp fra høyre. Angi tre punkter.

Finn ut noe om sammenhengen mellom vinklene. Se hvordan det blir når du flytter på de tre hjørnene.

Forsøk å få vinkel C til å bli 90 grader.

til å stille nye spørsmål? Dette har større verdi for videre utforskning og vil sannsynligvis virke motiverende på arbeidet. Vi bør stimulere dem til selv å stille spørsmål og finne ut av lignende oppgaver.

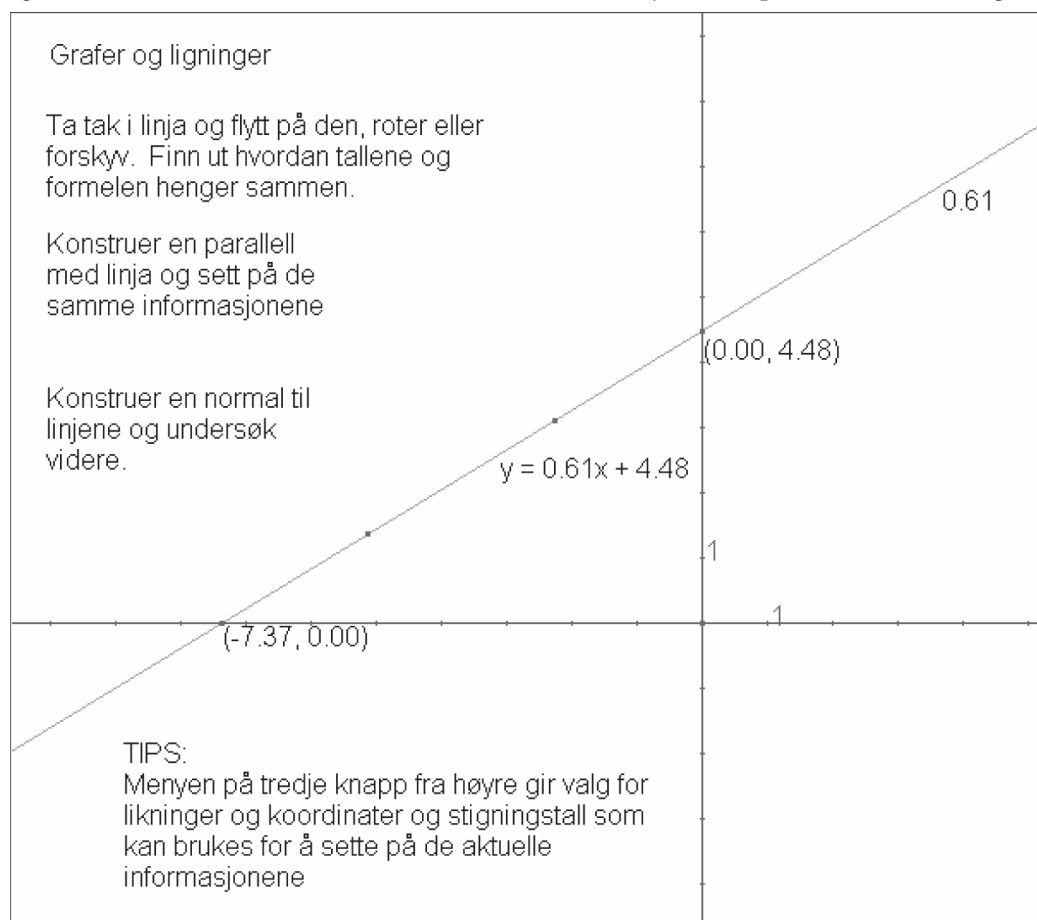
Vinkler i sirkelen

På arbeidsarket [ArbarkVinkler.fig](#) har vi først en trekant med hjørner på en sirkel. Vinklene kan måles, med verktøyet Vinkel på tredje knapp fra høyre, og oppgaven er å finne sammenhenger. Vinkelsum i en trekant kan for eksempel beregnes med 'Beregn (Kalkulator)', på tredje knapp fra høyre. Pek på tallene som skal inngå i beregningen, regneoperasjoner og så på '='. Svaret dras fra Kalkulatoren ut til tegneområdet for å vise resultatet. Resultatet

blir nå oppdatert fortløpende når figuren forandres (se illustrasjoner forrige side).

Papir og blyant og eventuelt lommeregner kan supplere Cabri dersom det faller enklere i bruk. Det er ikke noe poeng å bruke dataprogrammer til alt, men heller utnytte muligheter for kombinasjoner av flere verktøy når det er enklere.

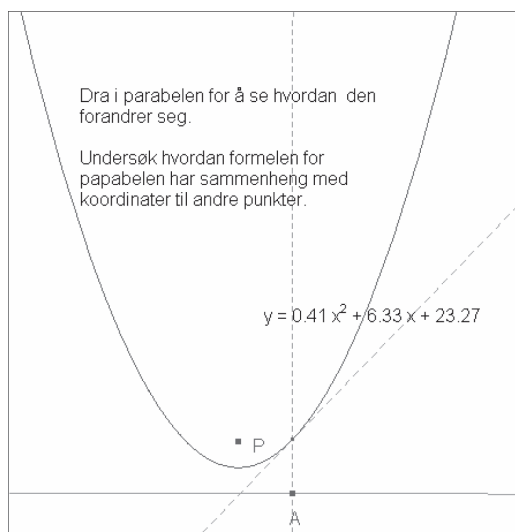
I den neste oppgaven er det en firkant med et hjørne i sentrum og de andre på sirkelen. Her kan vi finne ut noe om sentral- og periferivinkler og om summen av motstående vinkler. Siste punkt på samme arbeidsarket flytter et av punktene på sirkelen utenfor og vi studerer igjen sammenhenger. En annen mulighet kunne også være å se på vinkler i en firkant der alle hjørner er på sirkelen. Til slutt gis en



oppfordring til elevene om å finne andre oppgaver av lignende type og undersøke disse.

Hva betyr parametrene – funksjoner og grafer

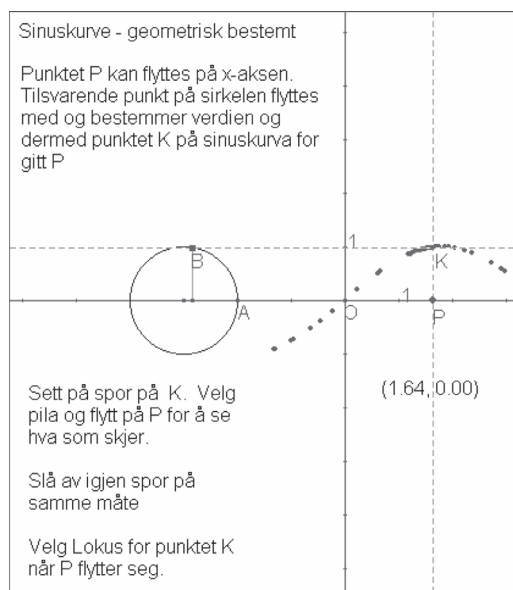
I arbeidsarket vist på forrige side ([ArbarkLi-Formler.fig](#)) er poenget å se sammenhenger mellom stigningstall, likningen for linja og skjæring med y -aksen. Vi kan tegne flere linjer og se på tilsvarende størrelser. Her er foreslått parallell og normal til ei gitt linje. Vi kan også starte med en gitt likning og spørre hvordan den vil gå og så forsøke å flytte linja slik at det passer. Menyvalgene 'Likninger og koordinater' og 'Stigningstall' på menyknapp nummer tre fra høyre har disse valgene.



Vi kan lage et tilsvarende arbeidsark for andre kurver. For eksempel har [ArbarkParabel.fig](#) en parabel som er konstruert ut fra definisjonen, samme avstand fra ei linje og et punkt P . De stiplede linjene er hjelpelinjer for konstruksjonen. Vi kan bruke menyvalget 'Vis aksene' om vi trenger å se nærmere på hvor parabelen er plassert.

Trigonometriske funksjoner

Dette arbeidsarket [ArbarkTrig.fig](#) viser hvordan sinuskurva kan tegnes ut fra en geometrisk illustrasjon. På en sirkel med radius 1 setter vi av lengde langs sirkelen som tilsvarende x -koordinaten til P , buen AB . På figuren viser de stiplede linjene hvordan et punkt K på kurven konstrueres, med en normal fra P og en parallell fra punkt B på sirkelen. Idéen med arbeidsarket er å se på K når P flytter seg. For dette er det god hjelp å bruke menyvalget 'Spor På/Av' på andre knappen fra høyre. Jeg har valgt å bruke første koordinaten til P for å sette av lengde på sirkelen slik at også negative x -verdier blir riktige. 'Lokus' – geometrisk sted – gir hele kurven tegnet opp. Menyvalget fins på femte knapp fra venstre.



Arbeidsarket kan muligens egne seg godt til demonstrasjon i klassen først, og senere kan det være en utfordring for elevene å lage tilsvarende for cosinusfunksjonen. Mye er likt, men det er en liten utfordring i å sette av den riktige lengden langs y -aksen. Det er flere

måter å løse dette på.

En ide som bruker noe av det samme som her, er å lage en illustrasjon som viser vinkel i grader på sirkelen og avstand i radianer langs x -aksen.

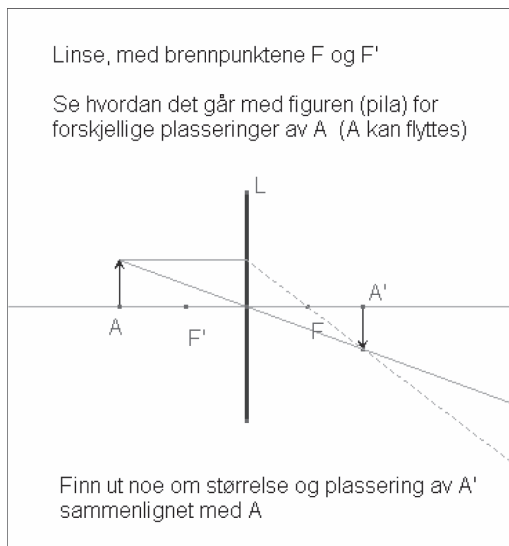
Det er også mulig i Cabri å tegne grafer til funksjoner gitt ved et uttrykk. Vi setter inn uttrykket i eksplisitt form, for eksempel: $x + \sin(x)$, med menyvalg 'Uttrykk'. Vi bruker 'Finn verdien til uttrykk' og bruker resultatet for y -koordinat. De aktuelle menyvalgene fins på andre og tredje knapp fra høyre. Nå kan grafen tegnes ved å bruke 'Lokus'. Vi kan senere redigere uttrykket for funksjonen og får automatisk tegnet graf for det nye uttrykket. Klikk på pila først og dobbeltklikk deretter på uttrykket for å redigere det. For å zoome inn og ut kan vi ta tak i et av merkene på aksene og dra til det er passende størrelse.

Å tegne grafer på denne måten er kanskje nærmere det vi gjør med papir og blyant enn med et kurvetegningsprogram. Cabri kan gi en god start før vi tar i bruk programmer som har mange flere muligheter innebygd. Grafen kan også tegnes raskere, ved å velge 'Finn verdien til uttrykk', klikke på uttrykket og deretter et punkt på x -aksen. Kurven kommer da automatisk.

Linse og plasseringer av bildet

Dette eksemplet er en demonstrasjon av reglene for lysbryting i ei linse. Se [ArbarkLinse.fig](#). Dette er aktuelt stoff både i matematikk og fysikk. Bildet i form av en vektor fra punkt A er tegnet opp. A kan flyttes for å se på forskjellige plasseringer, og vi får bildet i linsa ved A' . Brennpunktet F og linsa L kan også flyttes om det er ønskelig.

Her kan det være aktuelt å sammenligne resultatene med det vi ser gjennom ei konkret linse og forsøke å forklare de reglene vi finner.



Hvor må for eksempel A plasseres for at A' skal bli større? Kan vi forklare dette?

Med vilje er spørsmålene i arbeidsarket åpne slik at elevene kan utforske og ha mulighet til å danne egne hypoteser.

Arbeidsarkene skal gi startpunkter for utforsking og en hjelp til å komme i gang. Det gjelder å finne en balanse mellom enkle spørsmål og mer åpne utfordringer som elevene selv skal utvikle videre. Elevenes egne spørsmål vil ofte virke motiverende og stimulere utforsking. Det kan også tenkes at de finner andre regler og hypoteser enn det læreren tenker på.

Det fins flere kilder til arbeidsark eller ferdige Cabri filer laget med tanke på undervisning. Noen eksempler fins i *Data i matematikken* [2] og [1]. *Active geometry* er en samling med arbeidsark på papir og tilhørende filer i Cabri, utgitt av ATM, en engelsk matematikklærerforening [3]. På Cabri World 2004-konferansen presenterte en av forfatterne der også en stor samling med Cabri-filer for både grunnskole og videregående skole[5].

(fortsettes side 15)

for salg.

Personlig synes jeg menyene i Cabri kan være noe raskere å bruke, siden hvert av valgene under Objects-feltet i GEONExT rett og slett er lagt direkte tilgjengelig utover som en slags verktøylinje i Cabri. Men jeg vil likevel si at Cabri kan føles mer uoversiktlig når du skal bearbeide en konstruksjon ved å for eksempel gjøre deler av den usynlig.

Å lage det som kalles en makro i Cabri, betyr å lage en eller annen sekvens av operasjoner som du velger ut selv. Dette kan brukes til å gjøre vanlige konstruksjoner raskere, eller til å 'huske' visse kompliserte konstruksjoner. Det ser ikke ut til at GEONExT gir mulighet for å lage makroer, og det er synd. Men selv om dette ikke er mulig i GEONExT, så har vi her mulighet for å zoome inn konstruksjonen vi jobber med. Den muligheten har vi ikke i Cabri, til tross for at det er en opplagt fordel hvis vi jobber med litt større konstruksjoner.

En annen ting som selvfølgelig er behagelig med programmer som GEONExT og Cabri, er at du som lærer får relativt lett tilgang til å lage dine egne illustrasjoner på datamaskinen, og lagre dem til senere bruk. Hvordan du gjør det, kan du lese om i den utførlige nettversjonen av artikkelen.

Litteratur

- [1] Breiteig, Trygve og Venheim, Rolf: *Matematikk for lærere 1*, Universitetsforlaget, 2001.
- [2] Fuglestad, Anne Berit: Elektroniske arbeidsark i Cabri, *Tangenten* 2/2005.
- [3] Fuglestad, Anne Berit: Internettressurser – Dynamisk geometri, *Tangenten* 3/2000.
- [4] Knudtzon, Signe Holm og Aarnes, Johan F.: Morleys hjerte, *Normat*, 51:4 (2003) og 52:1 (2004).
- [5] *Nettside for nasjonale prøver i matematikk*, februar 2005: matematikk.nasjonaleprover.no

(fortsatt fra side 10)

Det er mulig å legge Cabri-filer ut på internett slik at vi kan eksperimentere direkte der uten å bruke Cabri. Det begrenser selvsagt mulighetene for videre arbeid, men gir gode dynamiske illustrasjoner som kan trekkes inn i undervisningen. Noen eksempler fins på Cabri Java-sidene og andre nettsteder for matematikkundervisning, se [6] og [7].

Referanser

- [1] Breiteig, T. & Fuglestad, A. B. (1997). *Data i matematikken*. (2 ed.) Oslo: Aschehoug.
- [2] Fuglestad, A. B. (1999). Læring med datamaskiner i konstruktivistisk perspektiv. *Tangenten*, 10, 27–33.
- [3] Hewitt, D., Mackrell, K., & Wilson, D. (2000). *Active Geometry. Files and Activities for Cabri -Géomètre II* [Computer software]. Derby, UK: Association of Teachers of Mathematics.
- [4] Hölzl, R. (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations – a case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 63–86.
- [5] Mackrell, K. (2004). *Using pre constructed Cabri files in secondary school* (primary school and post 16 mathematics, 3 sesjoner). Cabri World 2004 Conference
- [6] Cabri Java med eksempler: www-cabri.imag.fr/cabrijava/
- [7] MathNet Dynamic geometry: www.mathsnet.net/dynamic/index.html