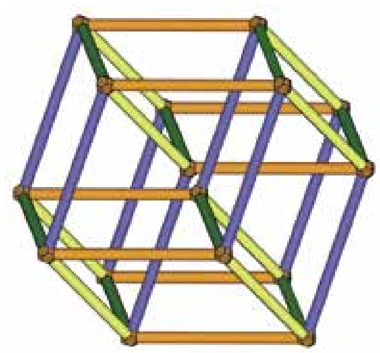
Naylor

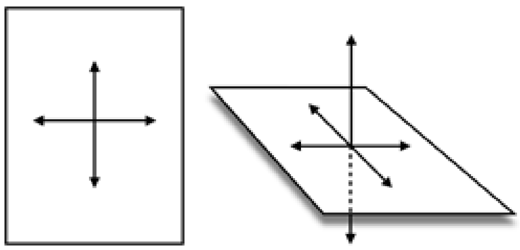
Utforske mønster i hyperkuber



Vi opplever verden i tre dimensjoner (3D). Ved bruk av tre forskjellige retninger – kanskje vi kan kalle dem *høyre-venstre*, *frem-tilbake* og *opp-ned* – kan vi flytte til alle punktene i 3D-verdensrommet. Men vi kan legge til flere retninger og utvikle geometri i flere enn tre dimensjoner uten problemer med logikk eller geometriske lover. Det åpner en helt ny verden med spennende former og opplevelser.

Mike Naylor
Matematikkbølgen
mike@matematikkbolgen.com

Forestill deg at verden er todimensjonal (2D), som et papirark, og vi opplever bare 2D-former. Du kan lett tegne to linjer som krysser hverandre i en vinkel på 90°. Hvis noen derimot fortalte deg at du kunne tegne en tredje linje som krysser i samme krysspunktet og treffer begge linjer 90°, ville du tenke at det er umulig (og i 2D *er* det umulig). Du må forlate papiret og tegne en linje som går rett opp fra papiret i en *annen dimensjon*. Da først kan alle de tre linjene treffe hverandre 90°. Dette hadde vært vanskelig å forstå hvis du aldri hadde opplevd en tredje dimensjon!



Figur 1 To linjer på et ark som treffer hverandre 90°. En tredje linje som treffer begge linjer 90°.

Slik er det når vi prøver å tenke en *fjerde dimensjon* (4d). Vi må forestille oss at det fins retninger som ikke ligger i våre dimensjoner, og at våre tre dimensjoner bare er et veldig tynt snitt av en verden med flere dimensjoner.

En måte å begynne med den fjerde dimensjonen på er å lage et av de enkleste 4d-objektene: en hyperkube. En hyperkube er en geometrisk form i fire eller flere dimensjoner som er analoge med en kube i tre dimensjoner. Som en 3D-kube har en hyperkube hjørner, kanter som treffer hverandre 90°, og kvadratiske flater. I tillegg har hyperkuber mange kuber som er sammensatt, og som til sammen blir et perfekt og symmetrisk objekt i fire dimensjoner.

Hyperkuber er morsomme og gir mange muligheter til å utforske matematiske ideer og mønstre. En god måte å bygge en hyperkube på og forstå dens egenskaper på er å gjennomføre en prosess hvor vi bygger fra et punkt med null dimensjon punkt til en kube med tre dimensjoner. Deretter fortsetter prosessen til flere og flere dimensjoner. For å hjelpe med analyse skal vi telle endepunkter (hjørner) E, linjestykker L, flater F, kuber K osv. for hver dimensjon og beskrive verdier med bokstaver med senket skrift, slik at L_2 er antall linjestykker i vår 2D-figur, osv.

Bli med …

Null dimensjoner (0d)

Et punkt eksisterer i null dimensjoner. Det har ingen bredde, lengde eller høyde. Hvis verden din var et punkt, kunne du ikke bevege deg i noen retning. Vi har bare et punkt. $P_0 = 1$ (figur 2).

Figur 2: I null dimensjoner har vi bare et punkt. $P_0 = 1$.

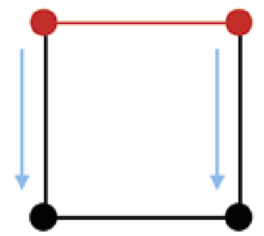
Én dimensjon (1d)

Strekk 0d-punktet i en retning (høyre eller venstre) for å få et linjestykke. Vi hadde ett punkt, nå har vi to endepunkter: $P_1 = 2P_0 = 2$. Siden punktet i forrige steg ble strukket til et linjestykke, kan vi skrive: $L_1 = P_0 = 1$ (figur 3).

Figur 3: Strekk punktet for å få et 1d-linjestykke.
$P_1 = 2$, $L_1 = 1$.

To dimensjoner (2D)

Strekk linjestykket i en annen retning (opp eller ned). Nå har det blitt et 2D-kvadrat. Antall endepunkter har doblet seg: $P_2 = 2P_1 = 4$ (og nå kaller vi dem hjørner). Linjestykket vi begynte med, har doblet seg (start-strekk og ende-strekk), og i tillegg har endepunktene strukket seg til et linjestykke: $L_2 = 2L_1 + P_1 = 4$. Linjestykket fra tidligere steg er blitt til en flate ($F_2 = L_1 = 1$) (figur 4).



Figur 4: Linjestykket blir til et kvadrat.
$P_2 = 4$, $L_2 = 4$, $F_2 = 1$.

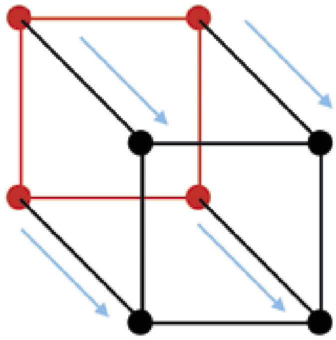
Tre dimensjoner (3D)

Strekk kvadratet i en annen retning (frem eller tilbake). Nå har vi en 3D-kube. Hvor mange endepunkter, linjestreker og flater har vi? Antall hjørner er doblet: $P_3 = 2P_2 = 8$. Antall linjestykker er doblet (4 i start-kvadratet og 4 i ende-kvadratet), pluss at alle hjørnene er strukket til linjestykker (4 linjestykker til): $L_3 = 2L_2 + P_2 = 12$. Antall flater er doblet, pluss at alle linjestykker er blitt til flater: $F_3 = 2F_2 + L_2 = 6$. Og nå vi har en kube: $K_3 = 1$ (figur 5).

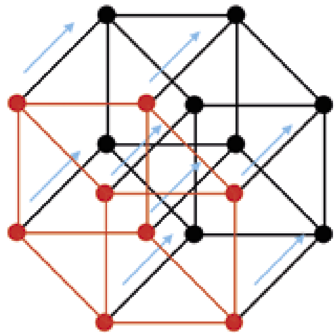
NB: Alle vinkler i figur 5 er 90°, selv om det ser ut som noen av vinklene ikke er 90° på 2D-tegningen av kuben. Vi forstår at 2D-tegningen er en *representasjon* av en 3D-kube.

Naylor, M. (2019). Utforske mønster i hyperkuber. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 30*(1). 26–29.

www.caspar.no/tangenten



Figur 5: Kvadrat blir til en kube.
$P_3 = 8$, $L_3 = 12$, $F_3 = 6$, $K_3 = 1$.



Figur 6: Kuben blir til en hyperkube.
$P_4 = 16$, $L_4 = 32$, $F_4 = 24$, $K_4 = 8$, $H_4 = 1$.

Dette er viktig å huske i det neste steget.

Fire dimensjoner (4d)

Strekk kuben i en fjerde dimensjon (*hit-dit-retningen kanskje?*) for å få en hyperkube! Hva slags deler har den, og hvor mange av hver? Hjørnene blir dobbelt så mange som i en kube: $P_4 = 2P_3 = 16$. Linjestykkene blir doblet, pluss at alle hjørnene blir strukket til nye linjestykker. Da blir det $L_4 = 2L_3 + P_3 = 2 \cdot 12 + 8 = 32$. Antall flater er doblet (start-kube og ende-kube), pluss at hvert linjestykke blir til en flate: $F_4 = 2F_3 + L_3 = 2\times6 + 12 = 24$. Kuben blir doblet, pluss at hver flate blir strukket til en kube. Da har hyperkuben 8 kuber: $K_4 = 2K_3 + F_3 = 8$ (se figur 6).

Pustepause

Studer tegningen av hyperkuben.

– Kan du telle alle hjørnene?
– Hver gang to linjestykker treffer i et hjørne, lager de en 90°-vinkel. Hvor mange 90°-vinkler er det i hvert av hjørnene?
– Kan du finne de fire forskjellige retningene som linjestykkene er i?
– Er alle retninger brukt på hvert hjørne?
– Hvor mange linjestykker er det i hver retning?
– Hyperkuben består av 8 kuber. Kan du finne alle 8?
– Det er morsomt å tegne et bilde av hyperkuben med papir og blyant. Kan du klare det?

dimensjoner	0D: punkter	1D: linjestykker	2D: kvadrater	3D: kuber	4D: hyperkuber	5D: hyperkuber
0	1					
1	2	1				
2	4	4	1			
3	8	12	6	1		
4	16	32	24	8	1	
5	32	80	80	40	10	1
6	?	?	?	?	?	?

Tabell 1: Egenskaper til ulike former.

Naylor, M. (2019). Utforske mønster i hyperkuber. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 30*(1). 26–29.

www.caspar.no/tangenten

Fem dimensjoner osv,

Prosessen kan utvikles til å tegne hyperkuber med så mange dimensjoner som du vil, men det blir selvfølgelig mer og mer vanskelig å holde orden på tegningene. Vi kan lage en tabell for å se på egenskaper til de forskjellige formene (tabell 1).

Spørsmål og ideer:

- Hvordan utvikles radene/kolonnene i tabellen? (Tips: Les teksten for prosessen.) Skriv de neste radene i tabellen.
- Hva slags mønstre fins i tabellen?
- Hvordan er tabellen lik og ulik Pascals trekant?
- Hvilken form er den første som har flere flater enn linjestreker? Flere kuber enn flater?

Mer

Nå har vi tatt et bitte lite blikk inn i 4d-verdenen. For å lære mer:

The Fourth Dimension (1984) av Ruder Rucker er ei kjempegod bok om den fjerde dimensjon som er veldig godt skrevet og lett å forstå.

Flatland er en historie om et kvadrat som ble besøkt av en 3D-sfære, og om hvor annerledes verden ser ut i flere dimensjoner! Boka ble skrevet i 1884, men det ble lagd en film av boka i 2007.

Naylor, M. (2019). Utforske mønster i hyperkuber. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 30*(1). 26–29.

www.caspar.no/tangenten