Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Christensen

Jordmåling

Elevene mine går på en Montessoriskole der de i stor grad får bestemme selv når de vil jobbe med de ulike fagene. Montessoriskoler følger de samme kompetansemålene som offentlig skole, har samme eksamen og følger ofte de samme bøkene på ungdomstrinnet. Forskjellen ligger i hvordan elevene jobber med fagene, og hvordan skoledagen er organisert. Det er sterkt fokus på ansvar for egen læring ved at elevene selv kan velge hvilket fag de skal jobbe med i løpet av skoledagen, de sitter i aldersblandede grupper, elevene jobber i to lengre arbeidsøkter med en lengre matpause fra kl. 11 til 12, og det er fokus på konkret materiell.

Maria Montessori fant gjennom forskning at effektiv læring ofte oppstod i et sensorisk rikt miljø, et miljø som tilbød interaktive, men uavhengige læringsmuligheter. I denne «utdanningslekeplassen» kunne barn velge fra et stort utvalg av utviklende aktiviteter som promoterte det Dewey kalte «learning by doing and reflection». Janet Kierstead løftet frem flere likhetstrekk mellom Montessori og Dewey i et foredrag på The Claremont Reading Conference i 1980:

Tore Christensen
Stiftelsen Montessoriskolen i Bergen
torechri@online.no

- Begge fremhevet at læring ikke bare innebærer passivt mottak av informasjon.
- Barnet danner mentale bilder ved å bruke ting, ikke bare ved å bli fortalt om dem.
- Mye av læringen blir ubevisst absorbert fra miljøet.
- Læring skjer også gjennom målrettet samhandling med miljøet.

Begge sier at læring skjer ved at kunnskap og erfaring bygges i skjemaer, og fokuset på materiell og elevaktivitet er også sentralt. Montessoripedagogikken kan dermed plasseres i et konstruktivistisk læringssyn. Jeg valgte å bruke dette som basis da jeg skulle skrive min masteroppgave (Christensen, 2017). Jeg utviklet ulike undervisningsopplegg der elevene fikk være aktive og selv utforske ulike matematiske sammenhenger. Det store avsluttende prosjektet var å bruke det vi hadde lært, til å måle noe så gigantisk som selveste jordkloden!

Elevene fikk begynne med å leke med ulike kvadrat. De fikk utdelt et elevark med spesifikke kvadrat som de skulle sette sammen til trekanter (se figur 1) og så undersøke egenskapene til trekanten. Etter hvert kom elevene frem til Pytagoras' setning.

I senere økter brukte vi læresetningen til å se hvordan apper som f.eks. «Find my Iphone»,

Christensen, T. (2018). Jordmåling. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(4). 2–6.

www.caspar.no/tangenten

Lengden på sidene til kvadratene	Summen av arealet til de to små kvadratene	Arealet til det største kvadratet	Type trekant
7, 8, 10	$A = 7^2 + 8^2 = 113$	$A = 10^2 = 100$	Spissvinklet
4, 5, 8			
6, 8, ?			Rettvinklet
8, 12, 17			

Figur 1: Utdrag fra elevarket.

bruker Pytagoras. Elevene fikk deretter elevark som viste reelle basestasjoner i lokalområdet. Arkene oppgav avstanden fra hver målestasjon til den tapte gjenstanden og høyden på basestasjonene. Ut fra dette brukte elevene Pytagoras og passer til å finne gjenstanden. Jordmålingen markerte slutten på prosjektet, og det er dette artikkelen vil dreie seg om.

Alt man trenger for å måle størrelsen til jordkloden, er to observasjonsposter med stor avstand ved havnivå og Pytagoras. For at man lettest mulig skulle kunne se hverandre på de valgte observasjonspunktene, ville vi bruke lommelykt og gjennomføre eksperimentet om kvelden.

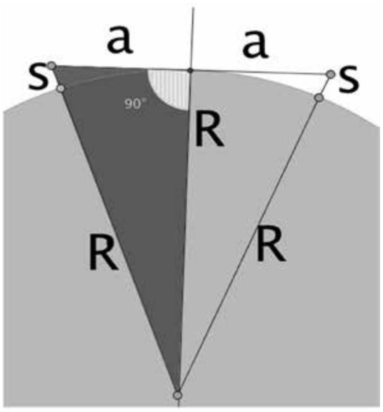
Observasjonspostene ser hverandre, og de er i samme høyde. Så beveger de seg sakte nedover til man finner punktet der de ikke kan gå lenger ned uten å miste hverandre av syne. Da har man situasjonen som er avbildet i figur 2. Vi utnytter symmetrien som oppstår, ser på den ene halvparten og utleder en formel for jordradiusen ved hjelp av Pytagoras (se figur 2):

$$R^2 + a^2 = (R + s)^2$$

$$R^2 + a^2 = R^2 + 2Rs + s^2$$

$$a^2 - s^2 = 2Rs$$

$$R = \frac{a^2}{2s} - \frac{s}{2} \approx \frac{a^2}{2s}$$



Figur 2: R = jordradius, a = halvparten av avstanden mellom observasjonspunktene, s = høyden til observatøren.

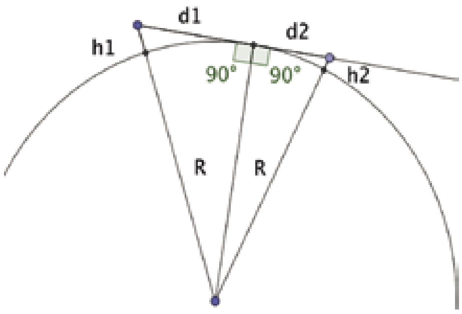
Vi kan se bort fra $\frac{s}{2}$, siden dette vil bli et ubetydelig tall i denne sammenhengen.

Dette er jo helt utrolig! Det eneste man trenger for å måle jordradien, er altså en enkel høydemåling og å vite avstanden mellom observasjonspunktene. Men her må observatørene være på *samme* høyde, og det må være to punkt med stor avstand (ca. 15+ km) imellom.

Dette er en formel som kan fungere som en god nøtt for de matematikkinteresserte elevene på ungdomstrinnet, og det er en fin øving innen algebra.

Uheldigvis er det sjelden at man vil få til dette. Som oftest vil observatørene være på to

Christensen, T. (2018). Jordmåling. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(4). 2–6.



Figur 3: Ulike høyder fra jordoverflaten opp til tangentlinjen.

ulike høyder når synskontakten forsvinner. Hva skjer da? Matematikken blir litt mer avansert, men vi kan fortsatt ta utgangspunkt i Pytagoras.

Vi får situasjon illustrert i figur 3. Med Pytagoras får vi:

$$R^2 + d_1^2 = (R + h_1)^2$$

$$R^2 + d_1^2 = R^2 + 2Rh_1 + h_1^2.$$

Vi kan se bort fra h_1^2, siden dette vil bli et ubetydelig tall i denne sammenhengen. Vi får da:

$$d_1^2 = 2Rh_1$$

og på samme måte får vi:

$$d_2^2 = 2Rh_2.$$

Den totale distansen, D, blir dermed:

$$D = \sqrt{2h_1R} + \sqrt{2h_2R}\,.$$

Vi omformulerer og får:

$$R = \left(\frac{D}{\sqrt{2h_1} + \sqrt{2h_2}}\right)^2.$$

Så fortsatt trenger man bare å vite høyden man er på når synskontakten forsvinner, og avstanden mellom observasjonspunktene.

Jordmålingen

Elevene ble spurt: «Hvordan vet du at jorden er formet som en ball?» Svært få mennesker (færre enn 600) har sett selve jordkrumningen med egne øyne, og bilder kan bli manipulert. Over de siste årene har elevene mine vist meg flere og flere YouTube-videoer som argumenterer for en flat jord, og dette er faktisk en svært økende trend. Er det mulig for oss å bevise at det vi tror på, er sant?

Som vist kan man måle størrelsen til jordkloden ved å bruke formelen vi fant, men det innebærer at vi må vite høyden vår. Hvordan kan man egentlig måle høyden sin om man står på en bakketopp? Dette var et spørsmål som elevene fikk diskutere sammen i grupper, de kom med flere originale løsninger, og vi diskuterte fordeler og ulemper med løsningene i plenum. Vi valgte å bruke en av metodene som ble utviklet under felles diskusjon: vaterstokk og målebånd – en ganske enkel, men effektiv

Figur 4: Elever fra 9. og 10. trinn som er i gang med å måle høyden til en bakketopp ved skolen. Metoden ble utformet etter felles elevdiskusjon.

Christensen, T. (2018). Jordmåling. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(4). 2–6.

www.caspar.no/tangenten

Figur 5: Siktlinjen fra Salhus (punkt 1) til Mjølkevikvarden (punkt 2).

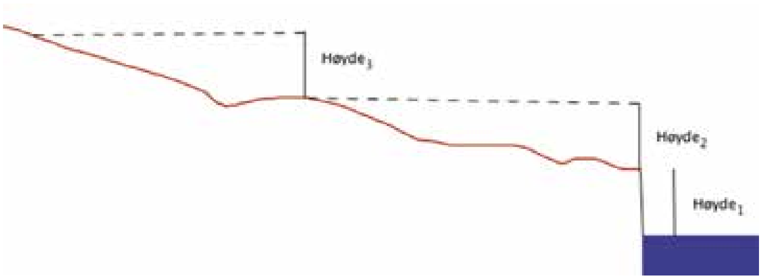
metode. Elevene fikk øve seg på en bakketopp før vi gjennomførte målingene ved observasjonspunktene (figur 4).

Elevene begynte nederst og jobbet seg oppover ved å bruke vater som var lagt opp på en bein stang. De målte høyden, markerte det nye startpunktet og gjentok prosessen. Det var to grupper som gjorde to målinger, og de var overrasket over hvor like resultatene ble.

Ett av hovedproblemene var å finne et passende sted for å gjennomføre målingene ved havet. For å få noen særlig målbar forskjell bør man ha en avstand på 15+ km, det må være langs havet, det må være trygt for elevene, og man må ha fri sikt. Før jeg startet undervisningsopplegget, hadde jeg sammen med min veileder fra UiB, Christoph Kirfel, undersøkt flere ulike steder. Problemet var at det alltid var noe som gjorde stedene uaktuelle. Prosjektet ble nesten kansellert siden vi ikke fant noen egnede steder. Vi bestemte oss for et siste forsøk: Salhus og Askøy. Stedene var perfekte, de var ca. 16,5 km fra hverandre, og de var lett tilgjengelig. Prosjektet kunne gjennomføres!

Elevene ble delt i to grupper. I november 2016 stod så den ene gruppen elever ved industriområdet ved Mjølkevikvarden (Askøy), og den andre stod ved Salhus. Ved å bruke bergenskart.no kunne man enkelt måle opp avstanden mellom observasjonspunktene.

Askøygjengen så blinkingen vår med en gang, men vi slet med å finne dem. Dette var veldig rart siden flere av elevene hadde svært sterke lommelykter. Problemet vårt var at vi var for opptatt med å bruke kikkert. Vi så i feil område, og vi burde heller bare brukt øynene våre. Da vi la bort kikkerten, så vi dem med en gang. Gjennom å snakke sammen via mobiltelefon fant vi punktet der lyskontakten akkurat forsvant. Elevene ved Askøy målte så høyden fra havet og opp til bryggekanten. Så målte de høyden trinnvis opp til punktet der lyset forsvant. Metoden er illustrert i figur 6 og er



Figur 6: Høydemålinger

Christensen, T. (2018). Jordmåling. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(4). 2–6.

samme metode som elevene hadde øvd på tidligere.

Målingene på Askøy ble gjennomført ved hjelp av vaterstokk og målebånd og av to ulike grupper. Høyden opp til vaterstokken ble målt opp, personen med vaterstokken gikk bort til det nye punktet og prosessen ble repetert til man kom frem til forsvinningshøyden til lyset. Høydemålingen og kontrollmålingen stemte overens, og det var bare noen centimeter i forskjell mellom de to gruppene.

Ved Salhus målte vi høyden først ved hjelp av målebånd og vater, men på grunn av sikkerhetshensyn gikk vi over til å bruke lasermåler. Ved Salhus forsvant lyset ved 6,85 meters høyde. Askøygruppen målte høyden sin til å være 3,49 meter. Vi plugget dette inn i formelen vi fant:

$$R = \left(\frac{16\,546 \text{ m}}{\sqrt{2 \cdot 6,85 \text{ m}} + \sqrt{2 \cdot 3,49 \text{ m}}} \right)^2 = 6\,803\,820 \text{ m}$$

Dette gav en jordradius som bare er omtrent 6,4 % større enn den reelle! Svært gode tall når man tenker over at man kun bruker lommelykt, vater og målebånd til å måle høydene!

Vi diskuterte videre hva som kunne ha gjort at vi fikk litt feil resultat, og hva som kan påvirke resultatet ved en slik måling. Elevene trakk frem det at vi gjorde flere steg i høydemålingen, og at det dermed kan være små feil i hver høydemåling som kan adderes opp til en stor feil. Om vi hadde klart å gjøre alt med bare én måling, hadde det blitt enda mer nøyaktig.

Elevene tok ikke opp at f.eks. bølger, lysbrytning og varierende jordkrumning også kunne ha påvirket resultatet. Tallene vi fant, er fortsatt ganske nøyaktige selv om vi legger inn en feilmålingsmargin på ±5 %, altså at den endelige høydemålingen på hvert punkt kunne hatt en feil på ±5 %. Om man da ser på de verst mulige utfallene, vil man få en jordradius som bare er ca. 10 % større enn den reelle verdien.

Under hele prosjektet fikk elevene komme med tilbakemeldinger, og de var svært positive til det praktiske arbeidet. Elevene virket mer engasjerte, og undervisningsopplegget vil bli gjennomført flere ganger. Forhåpentligvis med like gode resultat!

Figur 7: Elever på 9. og 10. trinn var på industriområdet ved Askøy. De hadde tykke klær, lommelykt, målebånd, vater og godt humør.

PS: Dersom andre gjennomfører prosjektet, så ønsker jeg gjerne å høre om hvordan det gikk, og hvilke geografiske steder dere brukte ved havet. Målet er å få bygget opp en liten «database» med aktuelle målesteder i landet. For en grundigere gjennomgang av dette prosjektet kan man lese masteroppgaven min (Christensen, 2017). Jeg vil også anbefale Gulaker og Tvete (2004) sin artikkel om jordens krumning.

Referanser

Christensen, T. (2017). *Analyse av undervisningsopplegg med undersøkende matematikk* (masteroppgave). Universitetet i Bergen.

Gulaker, D. & Tvete, K. (2004). Hvor krum er jorden? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 15*(4), 7–12.

Christensen, T. (2018). Jordmåling. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(4). 2–6.