Rennemo, Søvik, Meberg

Utviklende matematikklæring

Innledning

Høsten 2014 startet Lura skole opp med en ny undervisningsmetode i matematikk, Utviklende opplæring i matematikk (heretter kalt UOM, se tekstboks om UOM i Sandnes kommune). UOM utfordrer pedagogen til å undervise slik at matematikklæring skjer på elevens premisser, med læreren som veileder. Det er fokus på elevenes observasjon, analyse og logiske tenkning. Det gjelder ikke bare å finne svaret, men også hva som ligger bak svaret (Melhus, 2014). Elevene blir vant til å forklare og begrunne oppgaver ved hjelp av forskjellige løsningsstrategier. Det legges stor vekt på presis faglig språkbruk.

Samtale og begrepsutvikling

UOM kalles gjerne samtalematematikk. Vi bruker store deler av timen til felles klassesamtale der vår rolle er å være veileder og stille de gode spørsmålene. Elevene gjør oppdagelser og deler tankene sine med medelever. Elevene må på denne måten lytte aktivt til det de andre i klassen sier, og ta stilling til om de er enige, eller om de selv sitter med andre tanker.

Monica Gilje Rennemo
Lura skule
monica.gilje.rennemo@sandnes.kommune.no

Wenke Leonora Søvik
Lura skule
wenke.leonora.sovik@sandnes.kommune.no

Laila Karin Olsen Meberg
Lura skule
laila.karin.olsen.meberg@sandnes.kommune.no

Figur 1: Elever er muntlig aktive

I undervisningen bruker vi mange matematiske begreper. Disse oppdages og bygges systematisk opp sammen i klassen, slik at alle elevene utvikler en felles forståelse for hva begrepene inneholder. Dette gjør det lettere å skape en meningsfull kommunikasjon i klassen fordi elevene har en felles forståelse. Ved å uttrykke sine tanker muntlig får elevene ryddet opp i egne tanker, de bruker begrepene aktivt når de begrunner og argumenterer for løsningene sine, og medelever vil kunne oppdage andre måter å tenke på enn sin egen. Ofte kan en medelevs forklaring være mer forståelig enn en lærers forelesning. Underveis videreutvikles matematikk-

Rennemo, M. G., Søvik, W. L. & Meberg, L. K. O. (2018). Utviklende matematikklæring. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(1), 15–20.

www.caspar.no/tangenten

Utviklende opplæring i matematikk (UOM)

- Initiativ fra Gerd Inger Moe, samarbeider med Kjersti Melhus og Natasha Blank ved Universitetet i Stavanger.
- Utviklet av Leonid Zankov, student av Lev Vygotskij. Zankov videreførte Vygotskijs teorier om læring og undervisning i sonen for nærmeste utvikling og utviklet fem hovedprinsipper (Melhus 2014):
  1. Undervisning på høyt nivå
  2. Ledende rolle av teoretisk kunnskap
  3. Rask gjennomgang av stoffet
  4. Bevisstgjøring av barna i egen læringsprosess
  5. Systematisk og målrettet utvikling av hvert eneste barn i klasserommet

- UiS arrangerer samlinger for lærere som underviser etter modellen. Lura skole fungerer som ressursskole i kommunen. Dette innebærer observasjonsbesøk og refleksjonssamtaler med andre lærere som har erfaring med modellen, og introduksjon eller tips for dem som ønsker å lære om modellen.
- Andre artikler om UOM finnes i tidligere nummer av Tangenten som Melhus (2015) og Moe (2015) og i Bedre skole, Moe og Moe (2016).

språket, og når barna har et språk for tankene, styrker dette læringen.

Eksempel fra en samtale på 1. trinn

Lærer: Sammenlikn uttrykkene 3 + 5 og 5 + 3. Hva legger du merke til?
Mari: Begge uttrykkene har samme tall.
Janne: Jeg ser at uttrykkene har addisjonstegnet.
Emma: Det blir samme verdi i begge uttrykkene.
Truls: 3 + 5 = 8 og 5 + 3 = 8 fordi det er jo den kommutative loven for addisjon.
Lærer: Hva mener du med den kommutative loven for addisjon?
Truls: Når vi bytter plass på første og andre ledd ved addisjon, vil det fortsatt bli samme verdi.

Elevutsagnene viser at elevene analyserer eksempelet og presenterer og begrunner sin forståelse for hverandre med presise begreper. Vår rolle er å veilede elevene, mens elevene styrer samtalen og på den måten eier matematikken. De gjør oppdagelser og ser sammenhenger som er med på å skape eierforhold til begrepene, matematikken og forståelsen. Når undervisningen i så stor grad baserer seg på klassesamtale, gir dette høy elevaktivitet. For at flest mulig skal kunne bidra til felles klassesamtale, har vi innført kommunikasjonstegn i form av «jeg er enig», «jeg tenker noe annet» og applaus for innsats. Dette opplever vi som noe som er svært positivt for klassemiljøet.

Undervisningens oppbygning

På Lura skole skal elevene i starten av hver time møte noe de behersker, og målet er at de skal gå fra hver time med en følelse av mestring og av å ha lært noe nytt (Melhus, 2014). Vi velger å dele timen inn i fire deler:

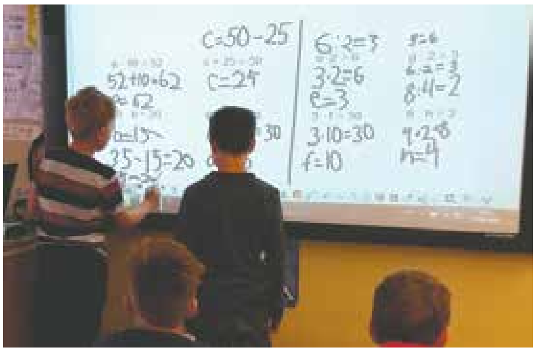
- *Grublis*: Motiverende oppstartsoppgave som er klar på tavlen idet elevene kommer inn i klasserommet. Målet med oppgaven er å pirre elevenes nysgjerrighet og interesse. Alle elevene kan bidra på sitt nivå. Oppgaven løses sammen med læringsvenn.
- *Nytt stoff*: Oppgaven inneholder elementer av kjent stoff, men tilføyer samtidig ny kunnskap. Nye oppgaver gjennomføres i fellesskap.
- *Kjent stoff*: Denne oppgaven er repetisjon av tidligere gjennomgått pensum. Gjennomføres oftest som selvstendig arbeid.
- *Avslutning*: Oppsummeringsspørsmål knyttet til nytt stoff som er introdusert i timen, og/eller ren regnetrening.

Rennemo, M. G., Søvik, W. L. & Meberg, L. K. O. (2018). Utviklende matematikklæring. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(1), 15–20.

www.caspar.no/tangenten

Noe av det vi har fokus på i undervisningen, er at vanskelig er bra, da strekker vi oss. Alle kan lære matematikk! Boaler (2015) skriver at vi ikke er født med matematikkhjerne, og vi vektlegger at alle elevene kan bidra med noe i gruppen, samt oppleve mestring på sitt nivå.

Siden UOM baserer seg på Vygotskijs teorier om nærmeste utviklingssone, legges undervisningen på et høyt nivå som barnet alene ikke er i stand til å mestre. Sammen med støtten fra



Figur 2: Likninger på 2. trinn

klassekamerater og lærerens stillasbygging gjennom blant annet veiledning kan elevene oppdage og lære.

På bildet (figur 2) viser et læringsvennpar på 2. trinn hvordan de løser likningen $35 - b = 20$. Guttene begrunner at b må være lik 15, fordi at «når b er lik 15, blir det en sann likhet. $35 - 15 = 20$ blir riktig! Vi kan også finne den ukjente ved å trekke 1. ledd fra verdien av summen, da finner vi 2. ledd (den ukjente) $35 - 20 = 15$.»

Bildet viser også løsninger fra andre læringsvennpar som blant annet har vist at når 1. ledd er ukjent, kan den motsatte regneoperasjonen brukes for å finne roten av likninger. Vi korrigerer ikke føring eller løsningsstrategi. Elevene forklarer og blir alltid applaudert for sine flotte tanker. Vi gir veiledende spørsmål hvis det er behov for det underveis, og forsikrer oss om at elevene avslutter med mestring.

Metodikken i UOM er basert på hurtig progresjon og hyppig repetisjon. Ved å repetere kjent stoff i korte intervaller har vi erfart at barna husker stoffet lettere.

For å få til en rask progresjon og hyppig repetisjon er det viktig for oss med effektivitet, både hos elever og lærere. Derfor gjør vi lærere klart alt før timen starter. Vi deler ut bøker og annet materiell som trengs, oppgaven er klar på tavlen, og når det ringer inn, står læreren klar. Elevene har trent seg på å være effektive i garderoben. På de laveste trinn har vi regnetrening mens de kler av seg. Når elevene går inn i klasserommet, er oppmerksomheten rettet mot oppgaven på tavlen. Læreren må hele tiden ha fokus på å holde fremdriften i timen, stille gode spørsmål for å få elevene til å komme fram til den konklusjonen en ønsker. Vi styrer klassesamtalen for å holde tempoet oppe, slik at oppgaven ikke drøyer og elevene ikke faller av fordi det er for lett eller for vanskelig.

Matematiske sammenhenger

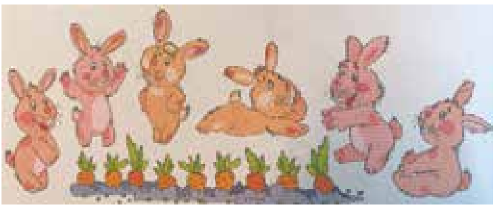
Læreverket *Matematikk* (Blank, Melhus & Moe, 2014a) har en annen oppbygning enn de fleste andre norske læreverk da det ikke er organisert i atskilte matematiske temaer, men man jobber med nytt stoff og kjent stoff innenfor flere ulike emner samtidig. I stedet for å ha mange oppgaver i for eksempel geometri er vi innom flere matematiske temaer i hver time. Siden hver ny oppgave er i et annet tema, blir elevene utfordret til å tenke i nye baner fremfor å følge en «mal» og bruke samme mal på alle oppgavene. Vår erfaring er at dette gjør at elevene lettere oppdager matematiske sammenhenger. Ved å oppdage nye sammenhenger vil elevene kunne utvikle stadig mer hensiktsmessige strategier, som de tar i bruk etter eget valg.

Eleveksempel 1. trinn

I dette eksempelet analyserer elevene i fellesskap bildet først (figur 3 neste side). *Blir det nok gulrøtter hvis kaninene tar en hver? Hvor mange kaniner er det? Hvor mange gulrøtter? Er det flest kaniner eller flest gulrøtter?*

Rennemo, M. G., Søvik, W. L. & Meberg, L. K. O. (2018). Utviklende matematikklæring. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(1), 15–20.

www.caspar.no/tangenten



Figur 3: Oppg. 61 (Blank, Melhus & Moe, 2014b, s. 32)

Etter samtalen der detaljene rundt bildet er blitt diskutert, får elevene se to modeller (figur 4). Hvilken modell passer til bildet?

Figur 4: Oppg. 61 (Blank, Melhus & Moe, 2014b, s. 32)

Jan: Jeg tenker at modellen til venstre passer til bildet.
Lærer: Hvorfor tenker du at modellen til venstre passer til bildet?
Jan: Fordi der skal sirklene være gulrøtter, for det er ni gulrøtter og ni rosa sirkler. Og så passer det med seks kaniner, og det er seks blå firkanter.

Noen elever viser tegnet «jeg tenker noe annet».

Lærer: Jeg ser at du tenker noe annet, Liv. Hva tenker du her?
Liv: Jeg tenker det samme som Jan, men jeg synes også modellen til høyre passer med bildet. Se det er jo ni firkanter og seks sirkler. Det kan òg passe med ni gulrøtter og seks kaniner!
Erik: Begge modellene passer! Det er bare det at her står symbolene for forskjellig. Til venstre står symbolene sirkler for gulrøtter, mens til høyre står symbolene sirkler for kaniner.

Etter at klassen i fellesskap stadfester at begge modellene passer, går samtalen videre til å se nøyere på modellene og hvordan vi kan bruke disse når vi skal finne ut hvor mange flere gulrøtter det er enn kaniner. Elevene bruker modell som redskap for å tydeliggjøre begrepene «hvor mange flere» og «hvor mange færre». Elevene må her begrunne svaret. De kan tydelig se på modellen at det er tre flere figurer i raden som viser gulrøtter.

Elevene får så spørsmål om hvilket tall som er størst: 6 eller 9?

Når elevene har svart på spørsmålet, blir de utfordret på å gi et begrunnet svar på om disse likhetene er riktige: 6 = 9 og 9 = 6.

Kari: Det er ikke likheter, for 6 er jo mindre enn 9. De er ikke like mange.
Lærer: Godt forklart! De kan ikke være likheter, for de er jo ikke like mange. I matematikken bruker vi spesielle symboler for å si om et tall er større eller mindre enn et annet. De ser slik ut: > og < (tegner på tavla). Vi bruker tegnene slik: 9 > 6 og 6 < 9. Dette kalles ulikheter. Legg merke til hvor åpningen er.
Nina: Åpningen er mot det største tallet.
Lærer: Åpningen er alltid mot det største tallet. Vi leser dem slik: *Ni er større enn seks, seks er mindre enn ni.* Tegnene >, < og = (skriver på tavla) kalles relasjonstegn. Si i kor: *re- la-sjons- tegn.* Her skriver jeg tallene 1 og 4. Hvilket relasjonstegn passer når vi skal sammenlikne tallene 1 og 4?

I dette eleveksempelet ser vi hvordan elevene selv finner en sammenheng mellom bildet og modell og så en sammenheng mellom modell og tall. De prøver å skape en mening i det de observerer. Oppdagelsene kommer fra dem selv, med veiledning i form av spørsmål som elevene da diskuterer. Vi ser mange aha-opplevelser hos elevene ved å stille spørsmål som de selv skal komme fram til i fellesskap. Noen kommer med et poeng, andre bygger videre på dette. Til slutt kommer man fram til hovedmålet med oppgaven. I dette eleveksempelet var hovedmålet introduksjon av relasjonstegnene større enn og mindre enn.

Oppgavene i UOM er utfordrende, og elevene blir ikke vist eksempler på hvordan de skal løses. Dette ivaretar elevenes kreative løsninger, det er mange veier til svarene. Det at vi gjennom samtale med elevene drøfter de ulike løsningene og veiene dit, gir mulighet for flere barn å oppleve mestring. Slike undervisningsprosesser bidrar til at elevenes tanker forblir åpne og kreative, samtidig som elevene øves i selvstendig tankegang.

Eleveksempel 3. trinn

Et eksempel på en problemløsningsoppgave der elevene øver på å tenke logisk (figur 5).

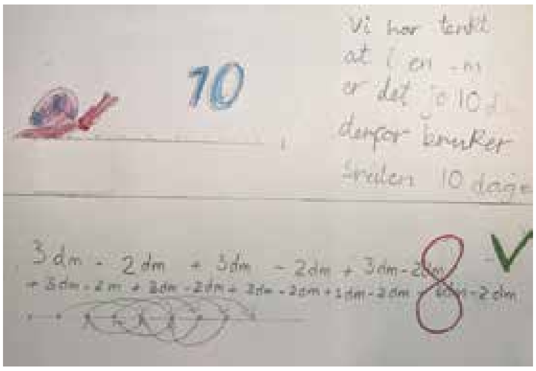
Figur 5: Oppgave 433, s. 117 i Blank, Melhus & Moe (2016)

Elevene settes først i gang sammen med læringsvenn for å drøfte løsninger uten noen informasjon fra læreren.

Elevene svarer:

– Vi tenker at sneglen bruker 10 dager fordi det er 10 dm i 1 m.
– Vi tenker han kanskje bruker 20 dager, for dag er jo dag og natt er natt.
– Vi må tenke døgn istedenfor dager! Den kryper 1 dm oppover pr døgn!
– Siste dagen han kryper oppover, sklir han ikke ned igjen for da er han jo på toppen!
– Han kryper 1 dm oppover 8 ganger før han er på toppen. Den 8. gangen, sklir han ikke ned igjen.

Figur 6 viser et eleveksempel på et løsningsforslag et læringsvennpar har laget.



Figur 6: Elevers løsningsforslag

I oppgaven er det også gitt to ulike løsningsforslag til elevene: *Stine: «Jeg fikk 10 dager.» Eline: «Jeg fikk 8 dager.»* Disse ble vist til elevene etter at de først hadde drøftet sine ulike forslag til løsning.

En god del av elevene våre mente at løsningen måtte være 10 dager ettersom de har kunnskap om at det er 10 dm i 1 m – og det er bra! Men nå viste det seg at løsningen ikke var så enkel. Ved å tenke mer ble løsningen annerledes. Likevel gir ikke elevene uttrykk for å bli mismodige etter å ha foreslått feil svar, for det var jo mange som mente det – til og med i boken var det en elev som hadde svart 10 dager! Elevenes strategi er god, og i en annen oppgave ville denne tankegangen fungert supert, men i denne oppgaven finner de ut at de måtte tenke annerledes. Og på denne måten dras elevene videre i utviklingen sin.

En av elevene så løsningen med en gang han leste teksten. Gjett om han var fornøyd etterpå!

Elevsyn og læringsmiljø

Når vi jobber med UOM, har vi en tanke om at alle kan lære seg matematikk. Målet er å få til en optimal utvikling hos hvert enkelt barn.

I undervisningen har vi fokus på at sammen får vi til mer. Vi ønsker at alle elevene skal delta og dele tankene sine. Feil er verdifulle. Det er

Rennemo, M. G., Søvik, W. L. & Meberg, L. K. O. (2018). Utviklende matematikklæring. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(1), 15–20.

www.caspar.no/tangenten

viktig å snakke om feil og misoppfatninger, slik at det kan avklares. Gjør man feil, endrer man tankesett og dermed husker man bedre – det er når man gjør feil, at man lærer. Ved å gjøre feil til noe positivt våger flere elever å delta i timen. Samtidig jobber vi med at vanskelig er bra; det er for at elevene skal få utfordring. Det er gøy med utfordrende oppgaver. Det er en treningssak å holde ut når oppgaven er vanskelig, og ikke gi opp for lett. Elevene opparbeider stayerevne. Mestringsfølelsen man får etter å ha jobbet hardt, veier ofte tyngre enn oppgaver som ikke krever samme kognitive utfordring.

Ettersom vi har jobbet etter denne modellen i noen år, har vi oppdaget at det ikke er bare matematikk elevene lærer seg, de tilegner seg også sosial kompetanse samtidig. Sosial kompetanse og faglig kompetanse går hånd i hånd. Elevene må lære seg å vente på å få ordet, ta ordet, tenke mottaker når de forklarer seg, og lytte til medelever. Dette er kjent, det gjelder i alle fag – også utenfor klasserommet.

Måten vi jobber med matematikkfaget på med både læresamtale, læringsvenn, applaus og de andre to kommunikasjonstegnene, er med på å bygge en fellesskapsfølelse i klassen. Se vi heier på deg! Vi klarte det! Vi er gode! Sammen bygger de mestringsfølelse hos hverandre og en flott fellesskapstanke om et trygt og godt læringsmiljø i klassen!

Det å være oppmerksom på egen læring er en viktig del av undervisningen. Elevene får vite litt om modellen vi bruker, de får vite litt om Zankov og Vygotskij, de blir bevisstgjort hvor mye egen deltakelse i timene betyr for klassen.

Oppsummering

Noen oppfatter matematikk som et fag der en har enten rett eller feil løsning. Den største gleden ved å undervise etter denne modellen er fokuset på veien mot løsningen fremfor selve svaret. Vi vektlegger at alt elevene bidrar med i den matematiske samtalen, er positivt for løsningen. Måten vi bruker feil svar på til å lære, gjør at alle elevers innspill blir betydningsfulle og viktige. Læreren vet fasiten, men ER ikke fasiten – den eier elevene.

Da vi startet opp matematikkundervisningen etter denne modellen for tre år siden, var det å takle elevenes innspill det mest utfordrende for oss lærere. Vi kunne jo ikke forutse alle løsninger elevene ville foreslå. Nå er det en befrielse, og til tider fornøyelse, å lytte til elevenes løsningsforslag og nærmest være en ordstyrer i debatten mot løsningen. Dette krever likevel god forberedelse av oss som lærere ettersom vi må være god på å forstå hvordan elevene tenker, og av og til må vi tydeliggjøre utsagnene deres. Begreper for matematiske prosesser blir viktig. Det gjør det enklere for elevene å uttrykke tankene sine – og forstå hva andre snakker om. Tankeprosesser settes i gang, og utvikling skjer.

Vi har erfart at elevene lærer seg problemløsning på flere plan. Å jobbe med matematikk er å lære seg å tenke. Lære seg å løse problemer. Det å kunne se problemer fra ulike synsvinkler, argumentere saklig for sitt synspunkt, men også forstå og respektere andres synspunkt, er utelukkende en nyttig kompetanse å ha med seg i livet.

Vi ser en klar endring i elevenes matematikkglede etter at vi begynte å jobbe med Utviklende opplæring i matematikk. Mye er takket være en ledelse på Lura skole som har støttet oss i omleggingen til UOM. Dette har gjort at vi kan tilrettelegge for elevene på en god og tilfredsstillende måte. Med ledelsen i ryggen og et godt og tett foreldresamarbeid ser vi at matematikkmotivasjon og resultater ved skolen er betraktelig hevet. Vi ser dessuten at læringsgleden for matematikk også gir økt læringsglede generelt. Læringslyst og læringstrykk, iver, selvstendig og kritisk tankegang overføres til andre fag.

Referanseliste

Blank, N., Melhus, K. & Moe, G. I. (2014b). *Matematikk Grunnbok 1A*. Kirkenes: Barentsforlag.

Blank, N., Melhus, K. & Moe, G. I. (2016). *Matematikk Grunnbok 3B*. Kirkenes: Barentsforlag.

(fortsettes side 47)

Rennemo, M. G., Søvik, W. L. & Meberg, L. K. O. (2018). Utviklende matematikklæring. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 29*(1), 15–20.

www.caspar.no/tangenten