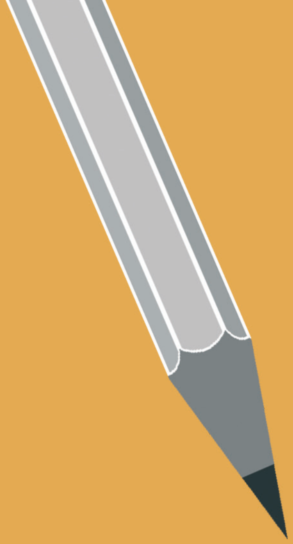

Funksjoner og derivasjon

Fra tid til annen hjelper jeg noen elever i videregående skole med matematikk. I den forbindelse har jeg registrert manglende forståelse for sammenhengen mellom en funksjons monotoniegenskaper og dens deriverte. Dette skyldes både undervisningen og lærebøkene. Jeg nevner ingen navn, men jeg vil gjerne meddele en liten opprydning.

Jeg kan begynne med et eksempel:

Gitt en funksjon f ved $f(x) = x^3 - 6x^2$. Oppgaven går ut på å finne ut hvor f er voksende og hvor den er avtakende. Korrekt løsning:

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4) = 0$
når $x = 0$ og når $x = 4$.

Vi finner lett at $f'(x) > 0$ når $x < 0$ eller $x > 4$, og at $f'(x) < 0$ når $0 < x < 4$.

Einar Jahr
Pensjonert lærerutdanner
einjahr@hotmail.no

Siden f er kontinuerlig i hele $\mathbb{R}$, er f strengt avtakende i $[0, 4]$ og strengt voksende i $\langle \leftarrow, 0]$ og i $[4, \rightarrow\rangle$.

Merknader:
Mange av de lærebøkene og lærerproduserte fasitsvar jeg har sett, formulerer løsningen slik:

(1) $f(x)$ er voksende for $x \in \langle \leftarrow, 0\rangle$, avtakende for $x \in \langle 0, 4\rangle$ og voksende for $x \in \langle 4, \rightarrow\rangle$.

Ofte ser man også som del av løsningen:

(2) $f(x)$ er voksende for $x \in \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 4, \rightarrow\rangle$.

Tar man dette bokstavelig, og det skal man jo i matematikk, betyr det for eksempel at $f(5)$ er voksende. Slik er det jo ikke. Monotoniegenskapene gjelder *funksjonen f*, og ikke de enkelte funksjonsverdiene. Monotoni er en egenskap som en funksjon kan ha i et *område*, ikke i punkter. Et område er i denne sammenhengen en delmengde av de reelle tallene $\mathbb{R}$ som består av ett eller flere – eventuelt ubegrenset mange – intervaller.

Definisjonene er slik:

- En funksjon f er *voksende* i området O når $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ for alle x_1 og x_2 i O.
- En funksjon f er *strengt voksende* i området O når $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ for alle x_1 og x_2 i O.

- En funksjon f er *avtakende* i området O når $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ for alle x_1 og x_2 i O.
- En funksjon f er *strengt avtakende* i området O når $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ for alle x_1 og x_2 i O.

Feilene i (1) og (2) ovenfor skyldes den misoppfatningen at *voksende* betyr positiv derivert og *avtakende* betyr negativ derivert. De områdene som nevnes der, består av nettopp de punktene x der $f(x)$ har det antydede fortegnet. Av denne grunn er tallene 0 og 4 unntatt fra løsningen. Man vil heller si at f verken er voksende eller avtakende i 0 og 4 enn å si at den er begge deler. Men ifølge definisjonene er det ikke snakk om hva f er i disse punktene, men om hvordan f oppfører seg i de angjeldende *intervallene*. Når f i eksemplet er strengt avtakende i [0, 4], betyr det at den i dette intervallet oppfyller kriterium 4 i definisjonen, selv om vi skulle velge $x_1 = 0$ eller $x_2 = 4$ eller begge deler.

Sammenhengen mellom en funksjons monotoniegenskaper og fortegnet til dens deriverte er som antydet i den korrekte løsningen. For å formulere denne sammenhengen helt presist, gir jeg først en definisjon:

Hvis O er et område, lar vi $\overline{\text{O}}$ betegne *tillukningen* til O, dvs. unionen av O og mengden av eventuelle randpunkter til O (jeg regner med at begrepene randpunkt og indre punkt i et område er kjent for leseren).

Da har vi følgende setning:

La I være et intervall. Hvis en funksjon f er deriverbar i det indre av I og kontinuerlig i $\overline{\text{I}}$, så gjelder følgende:

i) Hvis $f'(x) \geq 0$ for alle x i det indre av I, så er f voksende i $\overline{\text{I}}$.
   Hvis $f'(x) > 0$ for alle x i det indre av I, unntatt eventuelt i enkelte punkter, så er f strengt voksende i $\overline{\text{I}}$.
ii) Hvis $f'(x) \leq 0$ for alle x i det indre av I, så er f avtakende i $\overline{\text{I}}$.
   Hvis $f'(x) < 0$ for alle x i det indre av I, unntatt eventuelt i enkelte punkter, så er f strengt avtakende i $\overline{\text{I}}$.

Merknad: «unntatt eventuelt i enkelte punkter» betyr at vi kan ha $f'(x) = 0$ for noen verdier av x i I, men at det ikke skal være noe delintervall J av I der $f'(x) = 0$ i hele J.

For eksempel er funksjonen g gitt ved $g(x) = x^3$ strengt voksende i hele $\mathbb{R}$, selv om $g'(0) = 0$.

Det er viktig å merke seg at setningen over ikke gjelder dersom vi erstatter I med et vilkårlig område O. Feilen som er gjort i (2) ovenfor, skyldes at man ukritisk har slått sammen to atskilte intervaller til ett område. Ser vi på området $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 4, \rightarrow\rangle$, ser vi at $f'(x) > 0$ overalt her, men velger vi for eksempel $x_1 = -1$ og $x_2 = 5$, er $x_1 < x_2$, men $f(-1) = -7$ og $f(5) = -25$, og dermed er $f(x_1) > f(x_2)$, så f er ikke voksende i dette området.

Nå vil kanskje noen forsøke å forsvare oppfatningen at positiv derivert betyr voksende funksjon ved å si at om $f'(a) > 0$, så må vel f være voksende omkring a. Overraskende nok er heller ikke dette riktig. Betrakt funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ for } x \neq 0;\ f(0) = 0.$$

For $x \neq 0$ får vi $f'(x) = \frac{1}{2} + 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.

$f'(x)$ går ikke mot noen grense når $x \to 0$, og er positiv og negativ for x vilkårlig nær 0.

Men f er deriverbar for $x = 0$!

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\Delta x + (\Delta x)^2 \sin\frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{2} + \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Det betyr at $f'(0) > 0$, men f er ikke voksende i noe intervall omkring 0. Da er det meningsløst å si at f er voksende i 0.

Noen vil nok bli overrasket over å se at en funksjon kan være deriverbar i hele $\mathbb{R}$, men at den deriverte kan være diskontinuerlig.