Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Hana

Myriader på myriader

Ordet myriade er gått inn i språket vårt som betegnelse på mengder som er så store at de ikke overkommelig kan telles og knapt kan fattes. *Store norske leksikon* definerer det som «meget stort, uoverskuelig stort antall»[1]. Ordet stammer fra det greske ordet for ti tusen – et tall som ikke lenger anses som så stort at det ikke kan fattes, og større tall er i daglig bruk. En skal ha lest en avis overfladisk for ikke å være innom tallordene million og milliard. Den digitale verden er ikke lenger dominert av diskurs om kilobyte og megabyte; ord som gigabyte, terabyte og petabyte tar mer og mer over. I en verden hvor vi omgis av større og større tall, blir det viktig å forstå hvor store tallene faktisk er, og å kunne uttrykke og bruke disse tallene i personlige, samfunnsmessige, politiske og vitenskapelige situasjoner.

Barn møter tidlig ulike typer tallsystem: additive tallsystem i møte med penger og tellebrikker, multiplikative tallsystem i møte med tallordene og posisjonssystem i møte med skrevne tallsymbol. Med rette har læring og forståelse av disse tallsystemene vært et fokus innen begynneropplæring og matematikkdidaktikk. Det neste kvalitativt forskjellige tallsystemet elever møter, nemlig logaritmiske tallsystem, har derimot ikke fått samme oppmerksomhet selv om en også møter slike tall på skolen i form av tall på standardform i naturfag. Tallsystem som posisjonssystemet er velegnet til å beskrive mange tall, både store og små. For virkelig store og små tall er derimot posisjonssystemet nokså uhensiktsmessig. Kan du raskt si om 2648672908674238906743980672390 eller 467429306743982057423980745789 er størst? Har du noen anelse om hvor stort 264867290 8674238906743980672390 egentlig er? Det er omtrent fem ganger antall bakterier på jorden. Men det hjelper ikke særlig ettersom antall bakterier på jorden er et forbløffende høyt antall som er vanskelig å begripe – for eksempel inneholder menneskekroppen omtrent ti ganger så mange bakterieceller som menneskelige celler.

Fra egne tallord for hvert tall helt i begynnelsen av tallrekken beveger en seg mot gruppering i tiere og andre tierpotenser. For tall helt i begynnelsen av tallrekken får man en viss forståelse av hvor store tallene er etter hvor lang tid det tar å telle til dem. Ta et av de aller første tallene i tallrekken – en million. Det tar kun omtrent ni døgn uten søvn og pauser å telle til en million. Men selv for de fleste tall som kommer tidlig i tallrekken, er det aldri noen som har talt så langt. Det tar godt over tretti år bare å telle til en milliard. Når en kommer

Gert Monstad Hana
Høgskulen på Vestlandet
gert.monstad.hana@hvl.no

Hana, G. M. (2017). Myriader på myriader. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(4), 11–16

www.caspar.no/tangenten

ytterligere ut i tallrekken, består den fortsatt av tall, men den består ikke av tall som man har kommet til via telling. Tallene utover i tallrekken fremkommer via å lage struktur i mengder med store antall, og da hovedsakelig gjennom gruppering.

Tall som en million og en milliard kommer tidlig i tallrekken dersom en ser på hele tallrekken under ett. En million er tross alt bare en billiontedel av en billiard. Selv tall som Grahams tall – som inneholder Guinness-rekorden som det største spesifikke tallet benyttet i et matematisk bevis – er forsvinnende små sammenlignet med uendelig. Grahams tall er så stort at det trengs flere atomer enn det finnes i det observerbare univers, bare å skrive ned i posisjonssystemet hvor mange siffer det er i Grahams tall, for ikke å komme innpå sifrenes verdier.[2] Selve antallet tallet representerer, er igjen ufattelig mye større enn representasjonen av tallet via posisjonssystemet.

Additive tallsystem og store tall

Et additivt tallsystem består av en mengde symboler som er tilordnet ulike tallverdier. Verdien til en mengde av disse symbolene er summen av verdien til hvert enkelt av symbolene. For eksempel har våre mynter og sedler ulike verdier fra 1 kr til 1000 kr. Verdien av en samling mynter og sedler får vi ved å summere verdien til hver enkelt mynt og seddel. Derfor blir det fysiske pengesystemet vårt et additivt tallsystem.

Additive tallsystem er særlig velegnet til å addere og subtrahere med. Dette er en grunn til at det er praktisk at vårt fysiske pengesystem bestående av mynter og sedler er et additivt tallsystem. Når vi får eller gir fra oss penger, gir mynter og sedler en grei oversikt over transaksjonene og beløpene i etterkant.

Additive tallsystem er derimot ikke særlig velegnet til å behandle store tall. Det er en grunn til at det er lenge siden noen i Norge har betalt for et hus utelukkende med mynter. Mange har gjerne vært i eller har penger eller

Figur 1: Seddel fra Zimbabwe i 2009 verdt hundre billioner zimbabwiske dollar (bilde fra WikiMedia).

frimerker liggende fra land med hyperinflasjon (som i Zimbabwe i forrige tiår). En har kommet opp i situasjoner hvor det kreves flere tusen frimerker eller mer for å sende ett postkort, noe som selvfølgelig er uhensiktsmessig. Gjeldende sedler og frimerker blir nærmest verdiløse, og det må lages sedler og frimerker med større og større pålydende verdi (figur 1).

Multiplikative tallsystem og store tall

Et multiplikativt tallsystem består av en mengde koeffisienter og en mengde enheter som alle har sin egen tallverdi. Hver enhet kobles til (multipliseres med) en koeffisient før alle disse koblingene (produktene) legges sammen til et større tall. Et multiplikativt tallsystem er særlig velegnet for muntliggjørelse, og tallordene og verbale uttrykk for tallstørrelser danner da også et multiplikativt tallsystem. For eksempel uttales 3 265 som

Tre *tusen* to *hundre* og seks*ti* fem.

Her brukes tre, to, seks og fem som koeffisienter som multipliserer med tallordene tusen, hundre, ti og en (det siste tallordet «en» er implisitt og utelates i dagligtalen). Her benyttes tallordene tusen, hundre og ti som enheter. Dette gir opphav til forestillingen om at tall uttrykkes verbalt i et titallssystem. Dette stemmer faktisk bare for lave tall, for med en gang en begynner å uttrykke større tall, blir systemet et tusentallssystem. Tallet 234 547 453 uttales som

Hana, G. M. (2017). Myriader på myriader. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(4), 11–16

To hundre og trettifire *millioner* fem hundre og førtisyv *tusen* fire hundre og femtitre.

Her brukes 234, 547 og 553 som koeffisienter som multipliseres med tallordene million, tusen og en. Generelt uttrykkes alle større tall ved å benytte tallordene mellom 0 og 999 som koeffisienter og tallordene en, tusen, million, milliard osv. som enheter.

Det at en begynner med et titallssystem som utvikler seg til et tusentallssystem, kan være forvirrende for forståelsen av store tall. Det er et stort hopp fra ti til hundre. Det er et hopp som kan beskrives med en multiplikativ faktor på ti. Det er også et stort hopp fra en million til en milliard. Dette hoppet har en helt annen størrelsesorden enn hoppet fra ti til hundre. Den multiplikative faktoren i hoppet fra en million til en milliard er tusen. Altså er hoppet fra en million til en milliard multiplikativt sett hundre ganger større enn hoppet fra ti til hundre.

Grunnen til at tallordene etter hvert utvikler seg til et tusentallsystem, er en av de store svakhetene ved multiplikative tallsystem: Desto større tall som skal uttrykkes, desto flere tallord trengs det. Når et barn lærer å telle, lærer også barnet at på visse plasser i tallrekken kommer det inn nye tallord. Et velkjent eksempel er barn som teller tjueni, tjueti, tjueelleve osv. Her kommer det nye tallordet tretti på banen. Likeledes blir det feil å telle nittini, titi, titien, titito osv. Her blir tallordet hundre introdusert. Ved neste korsvei blir tallet tusen introdusert. En skulle da tro at når en kom til ni tusen ni hundre og nittini, så ville det også bli introdusert et nytt tallord for det neste tallet. Det blir det derimot ikke. Det blir uoverkommelig mange tallord å holde styr på om man også skulle ha tallord for 10 000, 100 000, 10 000 000, 100 000 000 osv. I stedet har en valgt å gruppere i tusener i stedet for tiere fra og med tallet tusen. Det er først når en har kommet opp i tusen tusen, at neste tallord introduseres, nemlig tallordet en million. Dette er derimot et bevisst valg som er gjort, og man kunne valgt å ha et eget tallord for 10 000. Og et slikt tallord finnes for så vidt, nemlig tallordet myriade. Det er derimot nokså sjelden at ordet myriade brukes i denne betydningen lenger. (En svært sjelden gang kan en støtte på ordet myriademeter, altså 10 000 m eller en mil.)

Hva så med tallord etter tusen? Disse tallordene er historisk sett nokså nye sammenlignet med tallordene for de første tallene. Ordet million oppstod en gang i middelalderen som en forsterking av ordet mille (tusen). Så ordet million blir da altså det som kommer etter tusen. Først utpå 1400-tallet så man et reelt behov for å introdusere tallord for enda større tall i titallssystemet. Jehan Adam og Nicolas Chuquet benyttet tall som billion, trillion og kvadrillion på slutten av dette århundret. Disse tallene tok utgangspunkt i en million: En billion var

$$1 \text{ million} \cdot 1 \text{ million} = (1 \text{ million})^2$$

Derav forstavelsen bi (= to). En trillion var $(1 \text{ million})^3$. Derav forstavelsen tri (= tre). Og en kvadrillion er $(1 \text{ million})^4$. Derav forstavelsen kvad (= fire). Mellom en million og en billion kommer så tallordet milliard (1 000 000 000), mellom en billion og en trillion er en billiard (1 000 000 000 000 000), og mellom en trillion og en kvadrillion er en trilliard (1 000 000 000 000 000 000 000).

Disse tallordene benyttes fremdeles i Norge. Noe som skaper forvirring rundt bruken av tallord for store tall, er at det er to ulike system i bruk: kortskalasystemet og langskalasystemet. Systemet som benyttes i Norge, er langskalasystemet. I kortskalasystemet benyttes ikke tallordene milliard, billiard, osv., og forskjellen på en million og en billion er en multiplikativ faktor på et tusen, ikke på en million (se figur 2). For eksempel benyttes kortskalasystemet i Zimbabwe, så pengeverdien på seddelen i figur 1 er 100 billioner dollar på norsk selv om det står 100 trillioner dollar på seddelen. Langskalasystemet benyttes i dag i Skandinavia og mesteparten av EU, mens kortskalasystemet benyttes i de fleste engelsktalende land.[3]

Hana, G. M. (2017). Myriader på myriader. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(4), 11–16

www.caspar.no/tangenten

Standard-form	Lang-skalanavn	Kort-skalanavn	SI-for-stavelse
10^3	tusen	tusen	kilo
10^6	million	million	mega
10^9	milliard	billion	giga
10^{12}	billion	trillion	tera
10^{15}	billiard	kvadrillion	peta
10^{18}	trillion	kvintillion	exa
10^{21}	trilliard	sekstillion	zetta
10^{24}	kvadrillion	septillion	yotta

Figur 2: Tallord i kortskala- og langskalasystemet samt SI-forstavelser.

Også SI-prefiksene gir navn til store tall. Disse prefiksene kombineres med måleenheter for å danne måleenheter av ulik størrelse, som i *kilo*meter og *desi*liter. Foreløpig finnes bare offisielle SI-prefikser for tall opp til en kvadrillion (se figur 2), men det er flere forslag til hva de neste skal være.

I Norge og resten av den vestlige verden benytter alle, selv om man benytter ulike tallord, et system hvor den multiplikative faktoren mellom tallordene for store tall er tusen. I andre deler av verden benyttes andre system. I Øst-Asia (Kina, Korea og Japan) er tallordene bestemt av et system som baserer seg på myriader i stedet for tusener. Så en billion blir ikke tenkt på som et tusen tusen tusen tusener, men som en myriade myriade myriader.[4]

Posisjonssystem og store tall

Posisjonssystem har den fordelen sammenlignet med additive og multiplikative tallsystem at alle tall i prinsippet kan skrives i posisjonssystemet, og at det ikke trengs å innføre noen nye enheter eller tallord når det arbeides med store tall. Problemet er at når det begynner å bli mange siffer, blir tall skrevet i posisjonssystem uoversiktlige. Ikke bare tar tallene mye plass, men det er vanskelig å ha klart for seg tallverdien til de ulike posisjonene. Ta tallet 2648672908674238906743980672390 som jeg benyttet i innledningen: Hvilken tallverdi angir de ulike 7-tallene her? Den vanligste måten å lette på dette problemet på er å benytte siffergruppering i grupper på tre. I stedet for å skrive 2648672908674238906743980672390 skriver man 2 648 672 908 674 238 906 743 980 672 390. Tallet er fortsatt vanskelig å få oversikt over, men det er blitt betydelig lettere. Grunnen til at det er hensiktsmessig å gruppere store tall i tre og tre siffer, er nettopp det at de store tallordene tar utgangspunkt i et tusentallssystem. Ved å gruppere i grupper på tre og tre siffer blir det korrespondanse mellom siffergrupperingene og tallordene.

Det er en del internasjonal variasjon når det gjelder siffergruppering, akkurat som for tallord. Mange har sikkert sett en milliard skrevet som 1.000.000.000 eller 1,000,000,000. Den fastsatte internasjonale standarden er å benytte mellomrom mellom hvert tredje siffer. En avgjørende grunn til dette er å hindre sammenblanding i kommunikasjon mellom land som benytter ulikt desimaltegn (som komma i Norge og punktum i USA).

Logaritmiske tallsystem og store tall

Selv med siffergruppering blir det vanskelig å holde styr på virkelig store tall i posisjonssystem. For et tall som 2 648 672 908 674 238 906 743 980 672 390 er det egentlig ikke av særlig interesse å kjenne til hvilke tallverdier 7-tallene svarer til. Det som er avgjørende, er å kjenne størrelsen på tallet, dvs. å kjenne antall siffer og de første sifferverdiene. Derfor skriver en ofte store tall på standardform, f.eks. $2{,}6 \cdot 10^{30}$. Generelt kan alle tall skrives på standardform $a \cdot b^{10}$, hvor b er et heltall og a er et tall mellom 1 og 10.

Når tall skrives på standardform, benyttes et logaritmisk tallsystem. Dette er tallsystem som baserer seg på eksponentverdiene til tall skrevet som en eksponent av tallbasen. Et logaritmisk titallssystem baserer seg da på eksponenten i uttrykk av typen 10^a. Et tall i et logaritmisk tallsystem tilsvarer da (tilnærmet) antall siffer tallet krever i et posisjonssystem med samme base.

Hana, G. M. (2017). Myriader på myriader. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(4), 11–16

www.caspar.no/tangenten

Det er ikke en forutsetning å kjenne logaritmebegrepet for å arbeide med logaritmiske tallsystem. Analogt til at elever lærer tallordene (som danner et multiplikativt tallsystem) før de lærer om multiplikasjon, lærer man om tall på standardform før man lærer om logaritmer.

Logaritmiske tallsystem har ikke det problemet som finnes for additive og multiplikative tallsystem, nemlig at det stadig må innføres nye enheter for å kunne uttrykke store tall. Som for posisjonssystem kan i prinsippet alle tall uansett størrelse uttrykkes.

Tall som skrives i logaritmiske tallsystem, blir betydelig kortere enn i posisjonssystem, og denne plassbesparelsen vokser desto større tallet er. Et tall med hundre siffer blir omtrent 10^{100} mens et tall med en million siffer – som tar ti tusen ganger større plass å skrive i et posisjonssystem enn et tall med hundre siffer – blir omtrent $10^{1\,000\,000}$.

Ikke bare tar tall uttrykt i et logaritmisk tallsystem lite plass å skrive, de er også lesbare og kan enkelt sammenlignes med hverandre. Mens en for tall med mange siffer i posisjonssystem trenger å telle antall siffer før en kan si noe sikkert om størrelsesordenen til tallet, så fremkommer denne størrelsesordenen nokså rett fra det logaritmiske tallsystemet. Å uttrykke, lese og forstå store tall er betraktelig enklere i et logaritmisk tallsystem. Dette siste krever naturligvis at en er godt kjent med og forstår det logaritmiske tallsystemet selv. Det hjelper lite at $2{,}6 \cdot 10^{30}$ tar lite plass dersom en ikke vet hva det betyr.

Mens additive tallsystem er velegnet til addisjon og subtraksjon, er logaritmiske tallsystem velegnet til multiplikasjon og divisjon. For eksempel blir

$$\begin{aligned}(2{,}6 \cdot 10^{30}) \cdot (7{,}3 \cdot 10^{25}) &= (2{,}6 \cdot 7{,}3) \cdot 10^{(30+25)} \\ &= 18{,}98 \cdot 10^{55} \approx 1{,}9 \cdot 10^{56}.\end{aligned}$$

Addisjon og subtraksjon er også relativt enkelt å gjennomføre for tall på standardform, men som oftest er det ene tallet så mye større enn det andre at resultatet domineres av det største tallet:

$$\begin{aligned}(2{,}6 \cdot 10^{30}) - (7{,}3 \cdot 10^{25}) &= (260\,000 - 7{,}3) \cdot 10^{25} \\ &\approx 2{,}6 \cdot 10^{30}.\end{aligned}$$

Strengt tatt er tall skrevet på standardform en hybrid mellom posisjonssystemet og et rent logaritmisk tallsystem. Tallet 2 648 672 908 674 238 906 743 980 672 390 er tilnærmet lik $10^{30{,}423}$ så i et rent logaritmisk tallsystem ville en vært ute etter eksponenten 30,423 og ikke eksponenten 30.

Den store fordelen med logaritmiske tallsystem er at de gjør det mulig å skrive store tall på en konsis form. Svakheten er derimot at denne konsise formen medfører at talluttrykkene blir unøyaktige og usikre. Når det gjelder svært store tall, er man som oftest mest interessert i størrelsesordenen til tallet, særlig når det gjelder målinger. For eksempel innen astronomi har en ikke mulighet til å være nøyaktig. En måte å variere unøyaktigheten i tallet på er å variere antall gjeldende siffer: $2{,}6 \cdot 10^{30}$ er skrevet med to gjeldende siffer (2,6), men tallet kunne også vært skrevet med ett eller tre gjeldende siffer (dvs. som $3 \cdot 10^{30}$ eller $2{,}64 \cdot 10^{30}$). Unøyaktigheten i tall skrevet med ett gjeldende siffer er 5 %, med to gjeldende siffer 0,5 % og med tre gjeldende siffer 0,05 %.

Å fatte store tall

Denne artikkelen har handlet om fordeler og ulemper ved ulike måter å uttrykke og symbolisere store tall på. Fra et didaktisk ståsted er dette bare en del av historien, en annen del er det å fatte størrelsen på disse store tallene. Problemet med å fatte store tall en kommer over, det være seg i aviser eller andre steder, er at en har relativt få så store mengder å sammenligne antallet med. For et tall som syv kjenner en til mange ulike mengder med syv gjenstander som er med på å danne et bilde av antallet syv. For tall som en billion er begrepsbildet

Hana, G. M. (2017). Myriader på myriader. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(4), 11–16

betraktelig fattigere. Det blir da avgjørende å møte eksempel og visualisering som er med på å danne et rikere begrepsbilde.

En del eksempel på forekomster av større tall er gitt på Wikipedia[4]. En annen kilde er tallordboka Dictionary of numbers[5], som er en utvidelse til nettleserne Chrome og Firefox, og som kan benyttes til å oversette tall en møter på nettet, til andre instanser av tilsvarende tallstørrelse. En plakat som visualiserer ulike tall i amerikansk økonomi finnes fra nettstedet xkcd[6]. Og nederst på siden tar vi med en visualisering av en billion dollar på nettsiden PageTutor[7], som spredde seg noe voldsomt på nettet et par år tilbake.

Noter

1 https://snl.no/myriade

2 Å uttrykke Grahams tall med symboler er omtalt i Hana (2013, kapittel 4.14).

3 Se Geoghegan (2011). Fullstendig liste finnes på https://en.wikipedia.org/wiki/Long_and_short_scales. For å skape ekstra forvirring har enkelte land vekslet mellom å bruke kortskala- og langskalasystem for tallord. Storbritannia byttet fra langskala til kortskala først i 1974. Frankrike og Italia benyttet begge opprinnelig langskalasystemet før de gikk over til kortskalasystemet, men begge har nå gått tilbake til langskalasystemet.

3 Det at det grupperes i myriader i stedet for tusener, gjør at det trengs færre tallord for veldig store tall. Det betyr også at tall som for eksempel en million, som nesten ses på som en naturlig antallsstørrelse for oss, uttrykkes 100 myriader. For store japanske tall, se http://www.sljfaq.org/afaq/large-numbers.html.

4 https://en.wikipedia.org/wiki/Orders_of_magnitude_(numbers)

5 https://DictionaryOfNumbers.com

6 http://xkcd.com/980/

7 http://www.pagetutor.com/trillion/index.html.

Referanser

Geoghegan, T. (2011). Is trillion the new billion. *BBC News Magazine.* Hentet fra http://www.bbc.com/news/magazine-15478580.

Hana, G.M. (2013). *Matematiske byggesteiner*. Bergen: Caspar forlag.

En million dollar

En billion dollar

Hana, G. M. (2017). Myriader på myriader. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 28*(4), 11–16