Reinert Rinvold

Konkreter i læring av algebra

Mange forbinder algebra med bokstavregning. Hvor mange av oss har ikke hørt folk fortelle om hvor bra det gikk med matematikken til de begynte med algebra. Hos noen lyser skrekken i øynene når ordet algebra nevnes. Forskere i matematikkdidaktikk har snakket om et sprang mellom tallregning og algebra. Det ble en svært krevende utfordring når man på ungdomsskolen plutselig skulle begynne med algebra i form av ligninger og uttrykk. Naturlig nok, har det blitt innført tiltak for å bøte på vanskene. I den gjeldende norske læreplanen for grunnskolen, LK06, kan dette blant annet ses gjennom at tallmønstre og geometriske mønstre nevnes som kompetansemål både etter andre, fjerde og sjuende trinn. Idéen er at algebra handler om mer enn bokstaver og symboler. Bokstaver som symbol for ukjente og variable størrelser er et nyttig hjelpemiddel, men dypest sett handler algebra om variasjon og generelle fenomener. Algebraisk tenkning er mulig uten bokstaver, men bokstavene gjør det mulig å nå lengre og håndtere mer komplekse problemstillinger. I tradisjonell undervisning i algebra har ofte mening, intuisjon og forståelse vært mangelvare. Med en slik tilnærming er det ikke uvanlig at elever blander sammen for eksempel ab og $a + b$ eller x^2 og $2x$. Arbeid med tallmønstre dannet av konkreter er et spennende utgangspunkt for å skape den meningen og motivasjonen som ofte har manglet.

Reinert Rinvold
Høgskolen i Hedmark
reinert.rinvold@hihm.no

Tannkremtuber

Tannkremtuber er kanskje ikke det vanligste hjelpemidlet i matematikkundervisning, men det duger! Her ser vi tre elever på 8. trinn som er klare til å ta fatt på en oppgave. De har figur 1 til 3 foran seg og skal lage figur 4 og 5. Byggingen krever at mønsteret er forstått på et intuitivt plan. Siden de skal samarbeide, faller det naturlig å sette ord på det som gjøres. Arne henter straks fire tuber fra en haug utenfor bildet og setter dem ned ved siden av hverandre.

Arne: Fire sånn og så blir det seks bak.

Eleven oppfatter altså greit at mønsteret består av to rader. Figur 5 bygges i samarbeid mellom elevene og de har ingen problemer med at det blir 5 tuber foran og 7 bak. I neste oppgave skal de finne ut hvor mange tuber som trengs for å lage figur 10 og figur 100. Utfordringen da er at det ikke er nok tannkremtuber til å lage disse figurene. Dessuten ville det vært upraktisk å måtte telle opp så mange tuber. Disse utfordringene motiverer elevene til en dypere forståelse av systemet bak oppbygningen av figurene.

Lise begynner kartleggingen av systemet ved å ta for seg første rad i figur etter figur. Hun peker først på den ene tuba foran i figur 1 og sier at i figur 1 er det en. Deretter gjør hun tilsvarende for første rad i figur 2, 3 og 4. Så kommer Arne på banen:

> Arne: Så blir det fire, og så øker det med to på hver.

Første del av setningen hans dreier seg om at det er fire i første rad. Så snakker han om at hver figur har to flere tuber enn den forrige. Lise følger opp med noen håndbevegelser eller gester som trolig har en viktig betydning. Hun holder hendene i karatestillingen på hver side av mønsteret og sier «to bak».

Litt etterpå gjør hun en ny håndbevegelse som starter med hendene sentrert. Hendene beveges utover til hver side parallelt med figur 4, inn til sentrum igjen og så ut til hver sin side normalt på figurens lengderetning. Like etter dette kommer det:

> Lise: Når det er ti er det ti foran og tolv bak.

Forskningsprosjekt

Elevene med tannkremtubene tok del i et forskningsprosjekt i Hamar. Prosjektet var et samarbeid mellom Andreas Lorange, NLA Lærerhøgskolen og artikkelforfatteren. Våren 2009 forsket vi på algebraisk tenkning hos lærerstudenter på et kurs i tallteori. Høsten 2009 var temaet innføring av ligninger og algebraiske uttrykk for elever på 8. trinn. Vi deler teorigrunnlag med Radford (2009) som blant annet går på at det sansemotoriske, kroppslige og fysiske spiller en sentral rolle i menneskelig tenkning. De involverte studentene jobbet med visuelt og fysiske representerte tallmønstre. Elevene møter enklere versjoner av det samme, men fokuset på fysisk laging av mønstre er større. Vi ser at det brukes mye gester når det arbeides med fysiske mønstre. Håndbevegelsene til Lisa bidrar trolig til å skape en romlig representasjon som avlaster arbeidsminnet, se Sabina (2008). Den siste av håndbevegelsene peker ikke på en konkret figur. Slike gester kan være med å danne et mer abstrakt bilde av figurene.

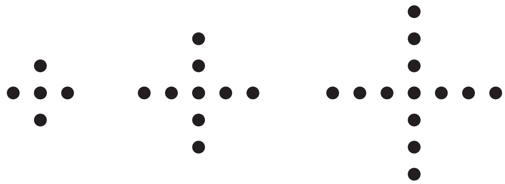
For å bygge opp algebraisk tenkning hos elevene, må det knyttes forbindelser mellom det visuelle og det verbale. Elevene ble bedt om å skrive ned en beskjed til en annen elev på trinnet om hvor mange tannkremtuber som trengs for å lage en figur når vi vet nummeret på figuren. Hos elevene kom formuleringen med ord naturlig opp i forlengelsen av å finne antall tuber i figur 10 og 100. Når forskeren spurte elevene om tankegangen skjedde dette:

> Arne: Siden det skal være ti må vi gange med to, men siden det var fire på den første [peker på figur 1 på arket] må vi plusse på to til. Da blir det tjueto.
> Forsker: Tjueto på nummer ti.
> Arne: Man kan egentlig bare gange tallet på figuren med to og plusse på to.
> Emilie: Figurtallet ganger to pluss to.

Stjernemønsteret

Før oppgaven med tannkremtubene arbeidet elevene med et stjernemønster i klassen sin.

Elevene lagde først figur 4 fysisk ved at hver prikk ble representert med en elev stående på gulvet. En elev tok initiativ og sa «Jeg er midten.» Andre elever stilte seg raskt opp og dannet de fire armene til figuren. Så brukte de små plastbrikker til å lage figurer med.



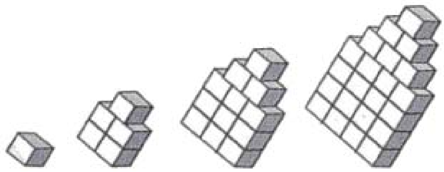
Figur 1 Figur 2 Figur 3

Etter først å ha kommet frem til hvor mange prikker det er i figur 10 og figur 100, beskrev en gruppe av tre andre elever antallet prikker i mønsteret slik:

> Figuren er et kryss. En i midten og fire veier ut fra midten. Figuren øker med en på hver vei, 4 til sammen. Figurnummeret ganger 4 + 1. Også har vi fig. 6 er det 6 på hver side + en i midten.

Disse elevene har en beskrivelse som inkluderer en generell formulering ut fra figurnummeret, men de er også avhengige av et eksempel og av hvordan figuren ser ut. Radford (2009) beskriver lignende utfordringer i sin artikkel. Elevene har så vidt begynt på en reise inn i algebraens verden og har fortsatt en veg å gå. I fortsettelsen tilbyr læreren dem bokstaver som et tankeredskap for raskt å skrive ned variable og ukjente størrelser. Elevene vil møte problemstillinger som både utfordrer dem til å bruke bokstaver og gjør bruken meningsfull for dem. Samtidig beholdes kontakten med det intuitive grunnlaget som skapes gjennom bruken av konkreter. Resten av historien om elevene på 8. trinn vil bli en annen artikkel. Forskningen på studenter kan imidlertid si noe om samspillet mellom konkreter og symboler, selv om problemstillingene er mer komplekse enn de elevene på 8. trinn får.

Algebraisering



Studentene Kåre og Erik skal utforske tallmønsteret i denne figuren. De hadde en alternativ representasjon av mønsteret fysisk bygget foran seg og en haug klosser tilgjengelig.

Studentene beskriver figurene som sammensatt av kvadrattall og trekanttall. Kåre oppdager etter hvert at sammenhengen mellom en figur og den neste kan skrives slik:

$$F_n = F_{n-1} + (K_n - K_{n-1}) + (T_n + T_{n-1})$$

Kåre forklarer hvorfor $K_n - K_{n-1}$ dukker opp ved å peke på fysiske figurer mens han snakker:

> Kåre: Ut fra den her [peker på fysisk F_2] til den [peker på fysisk F_3] blir det lagt til dette kvadrattallet [legger fingrene ned på F_3] minus det kvadrattallet vi hadde i stad. [Gjør sirkulær pekebevegelse rundt bunnen av F_2]

Erik tar over og erstatter $K_n - K_{n-1}$ med $2(n-1) + 1$:

> Erik: Hva er det som blir lagt til da? Det er jo sidene. Sidene på firkanttalla, pluss en.


Erik: Sånn [peker på ene sida], sånn [peker på andre sida], sånn [peker på hjørnet].
Kåre: Ja, sida så klart.

Erik har lagt den blå kvadratdelen av figur 3 nederst og den røde kvadratdelen av figur 2 oppå. Forskjellen mellom de to kvadratene deler han opp i to sider og et hjørne. Siden fungerer som variabel, men det blir $n-1$ fordi figurnummeret n er siden på det største av kvadratene. Det er ikke uvanlig at studenter går seg vil i om det skal være n eller $n-1$, men Erik og Kåre holder på imponerende måte styr på dette. Til slutt blir det riktig også for trekanttalldelen, men underveis skriver de $T_n - T_{n-1}$ i stedet for $T_{n-1} - T_{n-2}$. Fordi trekanttalldelen av figuren har et nummer lavere enn kvadrattalldelen, er den siste formelen det matematisk korrekte. Denne «feilen» hemmet ikke studentene i det hele tatt. Radford (2009) hevder at de ulike leddene i et uttrykk kan fungere som et bilde på eller en fortelling om elevenes tenkning. At det «feil» uttrykket fungerer som et intuitivt tankeredskap for studentene, tyder på at det er slik her. Et ytterligere argument er at de ikke trekker sammen formelen de får til slutt. Erik skrev det slik:

$$F_n = \underbrace{F_{n-1} + 2(n-1)+1}_{\square} + \underbrace{n-1}_{\triangle}$$

Denne skrivemåten kan oppfattes som at $2(n-1)$ står for kvadrattalldelen og $n-1$ for trekanttalldelen. En sammentrekking av formelen gjør at denne meningen forsvinner. Tilbake ville stått en formel som forteller hvordan vi skal regne ut antall klosser i en figur, men hvor kontakten med figurens visuelle fremtreden ville vært helt borte.

Heller ikke studentene har avsluttet den algebraiske reisen. Det er et stykke igjen før intuisjon og algebraens konvensjoner flyter sammen og støtter hverandre. Men, underveis har de gode muligheter for trivsel og læring. Elevene på 8. trinn sier det slik: «I mattetimene sitter vi ikke bare og regner i boka. Matte er spennende!»

Referanser

Radford, L. (I trykk). Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Kommer i Proceedings fra CERME 6.

Sabena, C. (2008). On the semiotics of gestures. I L. Radford, G. Schubring og F. Seeger (Red.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*, (s. 19–38). Rotterdam: Sense Publishers.