

Geir Martinussen, Bjørn Smestad

Multiplikasjon og divisjon av brøk

I denne artikkelen vil vi behandle multiplikasjon og divisjon av brøk, med særlig vekt på hvilke kontekster vi kan bruke og hvordan vi kan illustrere brøkgregning med tegninger. Vi tror at mange av problemene med brøkgregning kommer av at man for tidlig gir slipp på konkretiseringene, slik at elevene blir sittende å regne med brøk uten å ha forståelse.

Før man jobber med multiplikasjon og divisjon av brøk bør man naturligvis ha en viss forståelse for brøkbegrepet, forkorting og utvidelse av brøker og for overgang mellom blandet tall og uekte brøk. Dette går vi ikke inn på her.

Regning med brøk er et område hvor det kan være spesielt nyttig å gå fram i gradvise skritt – for eksempel å dividere med stambøker (brøker med 1 i teller) før man går videre til å dividere med alle mulige brøker. Derfor vil vi i denne artikkelen gå stegvis til verks.

Målings- og delingsdivisjon

Før vi går videre, vil vi minne om forskjellen på

Geir Martinussen

Høgskolen i Oslo

Geir.Martinussen@lui.hio.no

Bjørn Smestad

Høgskolen i Oslo

Bjorn.Smestad@lui.hio.no

målings- og delingsdivisjon som modeller for divisjon.

Eksempel: To tredeler skal deles på seks. Uttrykket blir $\frac{2}{3} : 6$.

En passende tekstoppgave kan være: «To tredels pizza skal deles på seks personer (resten har den sultne Tjodrik spist opp). Hvor mye (hvor stor del) får hver av de seks av hele pizzaen?»

Regner vi ut, finner vi at hver får en nidels pizza. Merk at vi hadde to tredels *pizza* og svaret ble en nidels *pizza*. Vi fikk samme benevnning i svaret som vi hadde i oppgaven. Dette er et eksempel på *delingsdivisjon*. Vi kan spørre: Hvor mye fikk hver – av det vi hadde? (Dette kan også illustreres med tegning, og det kommer vi tilbake til om litt.)

Snur vi på uttrykket foran, får vi $6 : \frac{2}{3}$. Her er det vanskelig å lage en tilsvarende regnefortelling/oppgave som ovenfor. Vi kunne sagt at: «Det går med seks kg gressfrø for å så inn to tredeler av plenen. Hvor mye trengs til hele plenen?» (Da ville vi hatt nok et eksempel på *delingsdivisjon*.)

Vi stiller i stedet spørsmålet slik: «Vi har seks kg sukker. Det skal legges i poser som hver tar to tredels kg. Hvor mange poser blir det?»

Det viser seg at de fleste elever synes den siste tilnæringsmåten er enklest å forholde seg til. Her blir svaret 9 poser. Merk at her har

vi 6 kg sukker. I svaret fikk vi 9 poser. Vi spurte om *hvor mange*. Vi får altså *ikke* samme benevning som vi hadde i utgangspunktet (derimot får vi samme benevning på dividend og divisor). Dette er et eksempel på *målingsdivisjon*. Vi måler opp *hvor mange* det blir.

Andre eksempler på målingsdivisjon til dette stykket er: «Du har 6 meter tau som skal deles i biter på to tredels meter hver. Hvor mange taubiter blir det?» eller «Du har seks liter vann som skal deles i flasker på to tredels liter hver. Hvor mange flasker blir det?»

Multiplikasjon av brøker

For å multiplisere brøker bruker vi regelen

$$\frac{\text{teller} \cdot \text{teller}}{\text{nevner} \cdot \text{nevner}}$$

Det viser seg at mange elever blander sammen med addisjon og starter med å finne fellesnevner, og det kan tyde på at regelen ikke er forstått godt nok. Da er det viktig at man forstår at det å multiplisere med en brøk handler om å ta en brøkdel av «noe». Og vi trenger eksempler – relatert til en virkelighet elever kan kjenne seg igjen i!

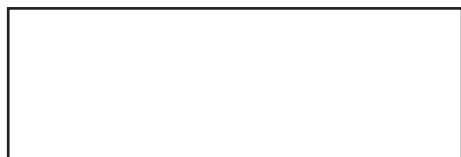
Eksempeloppgave 1: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Tekstoppgave: Du får tredjeparten av en halv sjokolade. Hvor mye får du av hele sjokoladen? (Det blir det samme om du får halvparten av en tredjedels sjokolade.)

Vi kan tegne løsningen. Vi deler sjokoladen i to. Av denne halvparten får vi en tredel.

La elevene tegne selv før løsningen presenteres for elevene:

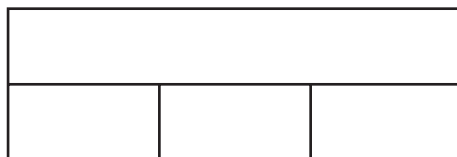
Her er sjokoladeplata:



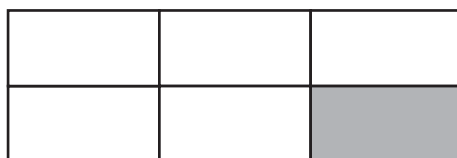
som vi deler i to:



Og så deler vi den ene halvparten i tre:



Da ser vi at en tredel av halvparten blir:



en sjettedel ($\frac{1}{6}$) av hele plata.

Og $\frac{1}{6}$ er selvsagt det samme som vi får hvis vi bruker regneregelen «direkte».

La elevene lage tilsvarende eksempler for hverandre, også uten at det er stambroker (brøker der teller er lik 1). La dem også prøve seg med blandet tall/uekte brøk.

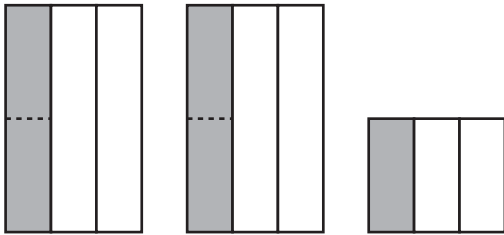
Eksempeloppgave 2: Forklar geometrisk (ved tegning) hvorfor $2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ eller $\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{2}$ blir $\frac{5}{6}$.

Hva er en passende tekstoppgave til disse uttrykkene?

Tekstoppgave: Du får en tredel av to og en halv liter brus. Hvor mye brus får du? Merk at oppgaven også kunne vært: To og en halv liter brus skal deles på tre personer. Hvor mye får hver? Oppstillingen på den siste blir: $2\frac{1}{2} : 3$ som jo tilsvarer $2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$. Dette kan være en illustrasjon på sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon.

Vi tegner de to og en halv liter brus, deler både litrene og halvlitren i tre og krysser av for hvor mye «vi får». Vi har satt inn en stiplet linje i

hver av de skyggelagte tredelene – for å markere at en tredel er det samme som to seksdeler:



Altså får vi fem seksdels liter.

Divisjon der brøk inngår

Regelen om at man skal multiplisere med den omvendte brøken viser seg også vanskelig å huske for elevene. For eksempel lurer elevene på om de like gjerne kan snu den første brøken. Dette tyder på at det er mangler i forståelsen, og igjen tror vi at det å jobbe med tegninger og med situasjoner som er forståelige, vil kunne hjelpe. Og det er viktig å ha begrepene delingsdivisjon og målingsdivisjon klart for seg.

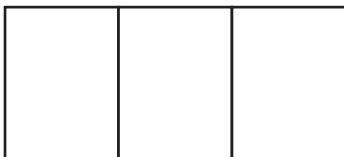
Eksempeloppgave 3: Hva blir $\frac{2}{3} : 4$? Lag en tekst til oppgaven.

Eksempel på tekst: To tredeler av et eple deles på fire. Hvor stor del av hele eplet får hver?

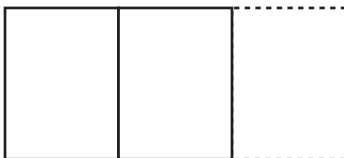
Vi ser at vi her kan bruke delingsdivisjon, siden divisoren er et heltall.

Vi kan vise oppgaven ved tegning slik:

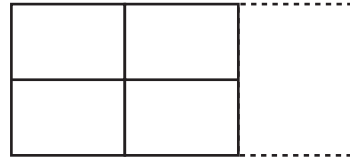
Her er hele:



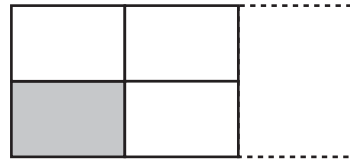
Og her er $\frac{2}{3}$ av hele:



Vi deler de $\frac{2}{3}$ i 4:



Tar ut en «bit» – og ser at vi får $\frac{1}{6}$ av det hele.



Det er ingen «tilfeldighet» at oppgave 1 og 3 gir samme svar. Vi ser igjen den tette sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon.

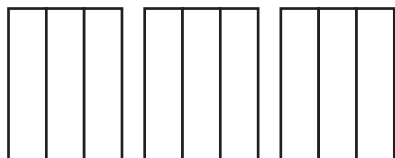
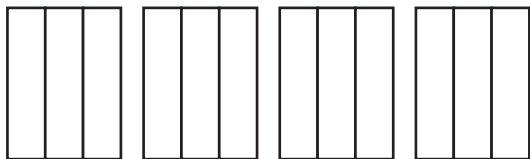
(Tips: Hva om den siste oppgaven hadde vært $\frac{1}{3} : 2$ eller om den første hadde vært $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$?)

Eksempeloppgave 4. Vi tenker oss at vi har ei kanne med 7 liter saft, som skal fordeles på flasker som hver tar $\frac{1}{3}$ liter. Hvor mange flasker blir det?

Slik oppgaven er stilt, er dette målingsdivisjon. Vi skal finne ut *hvor mange* flasker det blir, og svaret får altså ikke benevnningen liter (som det ville blitt ved delingsdivisjon).

Mange vil enkelt klare å ta dette i hodet, de tenker for eksempel at hver liter gir tre flasker, dermed gir 7 liter 21 flasker. Da har vi selv gjort om oppgaven fra en divisjonsoppgave til en multiplikasjonsoppgave!

Nedenfor er hver liter delt i tre, dermed blir hver del en tredels liter. Så kan vi telle opp, og ser at vi får 21 flasker. Vi kan også se det slik: Hver liter gir tre flasker, vi har syv liter så vi må multiplisere tre med syv. Da ser vi også enkelt hvorfor vi ”ganger med den omvendte brøken”.



For å løse oppgaven kan vi selvsagt skrive

$$7 : \frac{1}{3} = \frac{7}{1} : \frac{1}{3} = \frac{7}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{21}{1} = 21$$

Eksempeloppgave 5a: $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ Lag tekstoppgave.

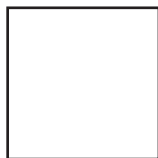
Vis løsningen geometrisk.

Dersom vi skal lage en tekstoppgave relatert til delingsdivisjon her, vil den sannsynligvis for de fleste virke temmelig «kunstig». For eksempel kunne vi sagt: «Et halvt tonn gjødsel er nok til (å fordele på) en kvart åker. Hvor mange tonn trengs til hele åkeren?» Eller: «En halv liter lakk rekker til fjerdeparten av gulvet. Hvor mye trengs for å lakke hele gulvet?»

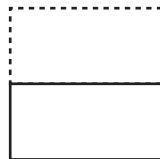
Men vi kan med fordel tenke målingsdivisjon her – og ha større mulighet for å få med oss de fleste elevene. Tekstopp-gaven kunne da for eksempel være: «En halv liter saft skal helles i glass som tar en kvart liter. Hvor mange glass blir det?»

Det blir også ganske enkelt å illustrere med tegning:

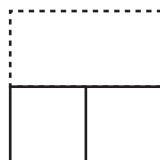
Her er en hel liter:



og her en halv:



som vi deler to i kvartlitre:

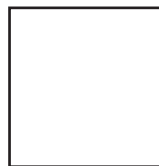


Så dersom vi deler en halv liter i glass som hvert tar en kvart liter, får vi to glass.

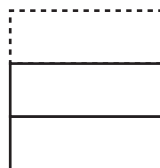
Eksempeloppgave 5b: $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$

Forslag til tekstoppgave: «Vi har to tredels liter brus. Rundt oss sitter forventningsfulle venner med hvert sitt glass som tar en seksdels liter. Hvor mange får?»

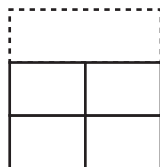
Her er en liter



og her er det to tredels liter igjen.



Deler vi i seksdels litre



ser vi at de to tredelene gir fire enheter på en seksdels liter. (Den siste delingen kunne vi også gjort direkte fra figur nummer 2, siden vi vet at

en seksdel er halvparten av en tredel.)

Altså får fire av vennene våre fylt glasset sitt.

Eksempeloppgave 6: $3\frac{1}{2} : 1\frac{1}{6}$

Hva er en passende tekstopp-gave her? Og hvordan kan løsningen vises ved tegning?

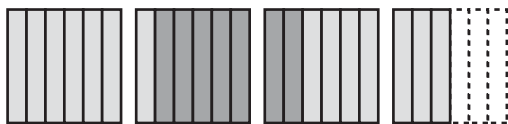
Her tenker vi som i de foregående. For eksempel har vi tre og en halv kg av «noe» som skal fylles i poser som hver tar en og en seksdels kg. *Hvor mange* poser blir det?

Noen vil kanskje «se» løsningen direkte. Tre seksdeler er jo lik en halv, altså er en halv delt på en seksdel lik tre – og deler vi tre på en, får vi også tre, så det blir altså tre poser. Dette resonnementet var kanskje ikke helt greit å følge (for mange elever), så det er sikkert lurt å lage figurer.

Her er det tre og en halv kg representert:



Så kan vi dele opp i «biter» à en seksdels kg. Siden vi vet at $1\frac{1}{6}$ er det samme som $\frac{7}{6}$, trenger vi syv av seksdelene til hver pose.



Og her kan vi «telle til syv» tre ganger, så vi får fylt akkurat tre poser.

Alle oppgavene til nå «gikk opp», men her kommer en som kanskje kan skape litt ekstra problemer:

Eksempeloppgave 7: $3\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$

Denne kan naturligvis regnes ved hjelp av brøkre-glene, men vi vil fortsatt gjerne ha en tekst og en figur.

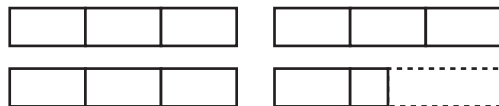
Tekstopp-gave kan for eksempel være: «Jeg har funnet tre og en halv kilo som jeg vil

smelte om til gullbarrer på en tredels kilo.»

Noen vil sikkert se at tre hele kg vil gi ni barrer, siden hver kg gir tre. Og dermed gir den siste halve kg en og en halv barre. Til sammen blir det altså ti og en halv gullbarre. (Hvor mye veier den halve?)

Mange elever som har jobbet mye med slike oppgavetyper, vil nok også etter hvert se de enkle løsningsmetodene – og kunne forklare dem for medelever – og lærer på en lettfat-teilig måte. Andre vil helt sikkert måtte ha (for eksempel) ei tegning å forholde seg til.

Her er de tre og en halv kg illustrert – opp-delt i «biter» på en tredels kg. Vi ser at av en halv kg får vi en barre og en halv til overs.



Så da blir det ti hele gullbarrer og en halv.

Anbefaling: La elevene løse (i hvert fall ha jobbet med) oppgavene selv før løsningene pre-senteres.

Dessuten er det lurt å la elevene lage oppga-ve til hverandre – og forklare for hverandre.

Ekstraspørsmål: Hva ville resultatet blitt dersom gullbarrene skulle veie en seksdels kilo? Altså om brøkuttrykket hadde vært: $3\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$

Avslutning

Multiplikasjon og divisjon av brøker er vanske-lig for mange. Vi håper at denne artikkelen har gitt noen innspill om hvordan man kan jobbe med dette. Det er nyttig å jobbe stegvis med temaet, for eksempel ved å dividere med brøker med 1 i teller før man går videre til generelle brøker. For mange elever vil det være klagjø-rende å arbeide med geometriske framstillin-ger av brøkoppgavene. Å se på tekstopp-gaver med sammenhenger som elevene kan kjenne seg igjen i, er også viktig – og her bør læreren være bevisst på forskjellen mellom delings- og målingsdivisjon. De fleste elevene er klar over