Karin Kairavuo

# Konkretisering av matematiska begrepp i skolan

Den kinesiska författaren och nobelpristagaren i litteratur, Gao Xingjian, använder en spännande metod i sitt arbete. Han talar in sina blivande texter på band för att kunna lyssna på dem innan han skriver ner dem. Det gör han för att texten måste uppfattas av örat och inte enbart med de verktyg vi använder när vi tänker.

Många vetenskaper har sina egna tecken för notation, sitt eget symbolspråk. De insatta kan enkelt ta del av symbolerna och förvandla dem till inre bilder.

En musikaliskt bevandrad människa kan läsa noter och samtidigt höra musik inom sig. På samma sätt kan en matematiker läsa matematisk text och göra sig en bild av situationen i sitt inre. För de allra flesta av våra elever behövs det någon form av konkretisering för att matematiska begrepp och regler skall bli begripliga och kunna befästas i deras verklighet.

Konkretisering är ett sätt att synliggöra matematiska idéer så att många, till sin läggning och utrustning, olika personer kan ta del av dem. När man konkretiserar stimuleras flera sinnen samtidigt och upplevelsen berör på djupet. Konkretisering sker oftast i samband med introduktionen av nya begrepp och regler.

**Karin Kairavuo**
Helsingfors stads utbildningsverk, Finland
karin.kairavuo@edu.hel.fi

För mig är konkretisering att *med hjälp av konkreta hjälpmedel vägleda eleven till förståelse av teoretiska begrepp*. Metoderna och hjälpmedlen vid konkretisering kan variera. Själv upplever jag mig konkretisera begrepp också när jag använder mitt språk till på olika sätt förklara nya begrepp och regler för eleven.

För matematikens del kan man genom att konkretisera få uppgifterna att stiga ut ur papperet. De svarta symbolerna på det vita papperet behövs, men konkretiseringen ger liv åt uppgifterna och hjälper eleverna att förstå teoretiska resonemang. När man arbetar med konkret material i matematikundervisningen blir uppgifterna öppna och ger möjlighet till differentiering. Vi konkretiserar för att hjälpa elever till förståelse av teoretiska begrepp, väcka nya idéer eller för att bekräfta det de redan vet.

Vad fordras det av en elev för att hon skall kunna känna glädje och ha framgång i sina matematikstudier? Som gymnasielärare frappeeras jag ofta av att problemen i matematik på alla stadier ser ganska likadana ut. Eleverna känner sig osäkra inför räkning med bråktal, hyfsning av enkla uttryck, räkning med kvadratrötter, skillnaden mellan uttryck och ekvation, införandet av variabel och parameter, enhetsomvandlingar.

Alla lärare vet hur viktigt det är att eleven tillägnar sig en god grund i matematikstudierna. En förutsättning för att studierna skall uppfattas som meningsfulla är att eleven med lärarens stöd får möjlighet till egen begreppsbildning. Läraren befäster sedan nya begrepp i elevens matematiska verklighet.

För elever i åldern 6–12 år är det naturligt att begrepp måste konkretiseras på olika sätt. Också för elever i de högre klasserna kan konkretisering öka intresset och förståelsen för matematiken.

Förutom klara begrepp behöver eleverna en god taluppfattning för att studierna skall löpa smidigt. Då man löser matematiska problem gäller det ofta att kunna ana sig till lösningsmodeller; man bör kunna koppla ihop olika delar av sitt kunnande på ett kreativt sätt. Ett sätt att beskriva den förmågan är att tala om en matematisk intuition. För att kunna utveckla en matematisk intuition är en god taluppfattning mycket värdefull.

Talen skall gärna ha en skepnad och skilja sig från varandra för att eleverna skall kunna experimentera med dem och använda olika tankemodeller. Med små transparanta färgknappar skapar vi bilder av två udda tal och visar elegant att summan av två udda tal alltid är jämn. Med hjälp av knapparna kan man lätt och vackert konkretisera eller visualisera ett antal matematiska regler som följer nedan. Uppgifterna nedan är exempel på hur man med ett konkret material, i detta fall de färggranna knapparna, kan konkretisera eller synliggöra matematiska regler och sanningar. Elevernas abstraktionsförmåga utvecklas i ”egen takt” vilket betyder att det i ett och samma klassrum oftast finns elever med väldigt olika förmåga till abstraktion. Med varierande undervisningsmetoder och med stöd av konkretisering kan man ge alla elever en chans till inlärning. Såväl hög- som lågpresterande elever gynnas av att använda varierande kanaler för inlärning.

## Visualisera ett udda tal med hjälp av knapparna

Bilden av ett jämnt tal upplever eleverna som naturlig. Man kan dela knapparna rättvist mellan två personer och två lika höga staplar kan bildas av knapparna. På matematikens exakta symbolspråk skriver vi $2 \cdot n$ där $n \in N$, de naturliga talens mängd. Ett udda tal däremot går inte att dela jämnt med två. Då vi arbetar abstrakt och endast använder symbolspråk betecknar vi ett udda tal $2n - 1$ eller $2n + 1$ där $n$ tillhör de hela talens mängd. Då vi konkretiserar udda tal använder vi oss av formen $2n + 1$ av naturliga skäl.

Vi skriver då $2n + 1$, där $n$ är ett naturligt tal. Då man använder konkretisering som hjälpmedel är det lämpligt att jobba endast i talmängden $N$.

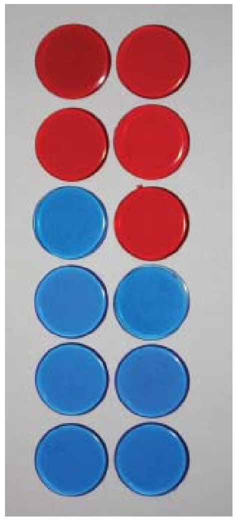
Nu kommer vi till den egentliga uppgiften. Vad gäller för svaret då man adderar två udda tal?

## Bevisa att summan av två udda tal alltid är ett jämnt tal.

Om eleven har bekantat sig med udda talen och deras ”konkreta” framställning är det enkelt att bevisa satsen ovan:

$$(2n+1)+(2m+1)=2n+2m+2=\mathbf{2}(n+m+1)$$

där $(n+m+1)$ utgör ett positivt heltal. Alltså är summan av två udda tal alltid ett jämnt tal.



Beviset ovan är inte speciellt svårt för en elev att lära sig om läraren visar bevisföringen med symboler. Om eleven har laborerat med talens egenskaper och visuella utseende är det sannolikt att hon kan komma på beviset utan handledning av läraren.

### Visa att $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$

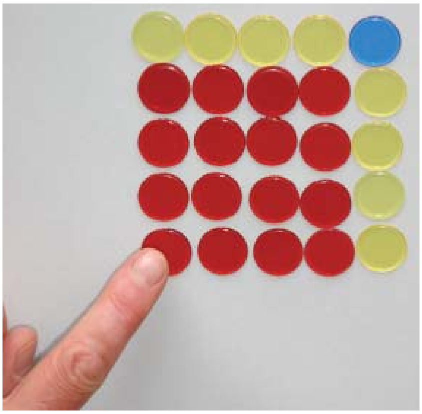
Summan av på varandra följande udda tal, börjande från 1, blir alltid ett kvadrattal.

Att konstatera faktum genom att summera talen kan vara en upplevelse i sig. Man kan dock konstatera samma sak genom att forma udda tal med hjälp av färgknappar och sedan foga ihop en bild, där man börjar med den triviala ettan och därefter omgärdar den ensamma knappen med knappar, formade som bilder av talen 3, 5, 7,…

Resultatet är förbluffande i början, men medan eleverna bygger den allt större kvadraten inser de att regeln är allmängiltig.

Eleverna konfronteras med kvadreringsregeln (kvadratsetning, red. anm.) i årskurs 8 och den upplevs som svår av många elever. Här hjälper det med konkretisering. Eleverna märker själva att den «dubbla produkten» motsvaras av de gula knapparna på bilden. Förståelsen ökar och den vägen blir regeln och begriplig. Man kan använda färgkoder och tala om de röda knapparna som motsvarar $n^2$, de gula kommer från $2n$ och till sist den ensamma blåa knappen som representerar ettan.

Konkretisera kvadreringsregeln
$(n+1)^2=n^2+2n+1$



En annan uppgift som kräver god taluppfattning :

«Bevisa att $(n^3-n)$ är delbart med 6
då $n\geq 2$»

Uppgiften förekom i studentexamensprovet i matematik hösten 2007 i Finland. Jag minns att jag gett samma uppgift till mina elever i första gymnasieklass för ett antal år sedan. De klarade av att hyfsa uttrycket till $n(n-1)(n+1)$. Därefter var det stopp. Eleverna hade svårigheter med att dra slutsatser av resultatet. De saknade *erfarenheten* att vart tredje tal är delbart med 3. Den upplevelsen kan man ge dem redan i tidig ålder. En talremsa rullas runt en Toblerone ask som på bilden och saken är klar.

I exemplen ovan har vi utgått från ett konkretiseringsmaterial, i detta fall de små färggranna och transparenta knapparna, och samlat begrepp samt regler som låter sig konkretiseras med hjälp av dem. Nu vänder vi på steken och undersöker hur *kvadratrotsbegreppet* görs synligt med hjälp av olika konkretiseringsmaterial.

Vi låter färgknapparna fungera som en bro och startar med dem.

Eleverna får uppgiften:

> «Rada knappar i formationer som är lika breda som de är höga. Vi kallar antalet knappar i formationerna för kvadrattal.»

Läraren gör därefter en tabell med en kolumn för det totala antalet knappar i formationen och en annan kolumn för antalet knappar på en sida.

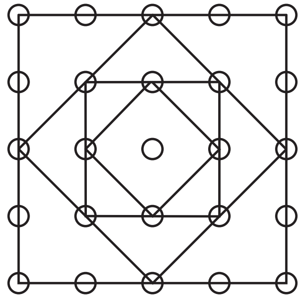
På så sätt får eleverna i ett tidigt skede en uppfattning om kvadratrotens uppgift. Det kan vara spännande att utforska vilka antal knappar som låter sig formas till en kvadrat.

Än så länge får eleverna nöja sig med att kvadratrotens värde är ett heltal. En fundersam elev kan leva i tron att kvadratroten av 17 inte existerar. I heltalens värld är allt ännu enkelt. Nu utökar vi mängden av tal som konkretiseras. Vi tar med också de irrationella talen.

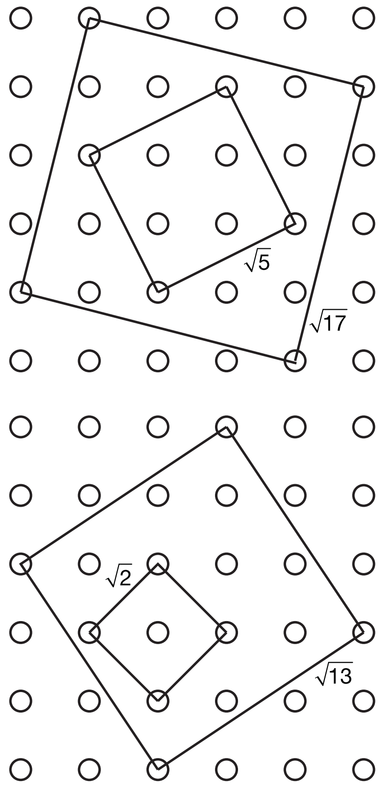
Då byter vi konkretiseringsmaterial från knapparna till geobrädet. Om det inte finns geobräden i skolan kan man använda prickpapper.

Uppgiften till eleverna lyder:

> Märk ut en kvadrat med arean 16 rutor på geobrädet. Markera inne i den förra kvadraten en ny kvadrat, vars area är hälften av den förra kvadratens area. Fortsätt på samma sätt ytterligare två gånger. Gör därefter en tabell lik den förra. Ena kolumnen ger kvadraternas area och den andra ger längden av sidorna.



Denna övning kan utvecklas och ger läraren möjlighet till individualisering. Efter att Pythagoras sats är känd för eleverna kan man fritt laborera vidare och be eleverna visa kvadrater på geobrädet med areorna 2, 5, 13, 17, …




En följdfråga kan ju vara varför $\sqrt{3}$ inte går att visa på geobrädet.

Jag har fortsatt uppgiften med äldre elever så att vi byggt rätblock med hjälp av små kuber med sidan 1cm. Längden av rymddiagonalen i den lilla kuben kan då få representera $\sqrt{3}$ och

$\sqrt{14}$ kan visas med hjälp av ett rätblock med dimensionerna 1 cm, 2 cm, 3 cm.

I ett tangrampussel vimlar det av kvadratrötter. Vi bestämmer att arean av den enda parallellogrammen i pusslet är 1. Därefter kan vi be elever från åk.8 framåt beräkna arean samt sidornas längder för alla de andra delarna. De kan också bygga en serie kvadrater med hjälp av bitarna, där varje kvadrats area är hälften av den föregående kvadratens area. En intressant uppgift får vi om vi ber dem lägga fyra kvadrater sida vid sida, såsom bilden visar, och därefter lägga en linje genom alla fyra kvadraters övre hörn till höger. Det finns säkert elever som gärna försöker sig på att bevisa det som ser ut att stämma i bilden, d.v.s. att linjen verkligen går genom alla kvadraters övre, högra hörnpunkt.

Vill man ge den intresserade eleven en spännande utflykt kan vi fortsätta uppgiften också efter att Tangram-bitarna tagit slut. Vi halverar kvadraternas areor i all oändlighet och beräknar summan av alla kvadraters sidor. Det intressanta är att alla dessa halverade kvadrater ryms på såväl en finländsk som på en norsk elevs arbetsbord.