Christoph Kirfel

Matematikk i Bård Breiviks kunst

Avansert matematikk er til de grader til stede og nødvendig når mange av Bård Breiviks kunstverk blir til. Kunstneren har alliert seg med arkitekt Petter Andreas Larsen, informatikkstudent Thomas Nygreen og professor i bildebehandling Fritz Albregtsen. Vi skal se på et kunstverk som heter «Orions Belte».

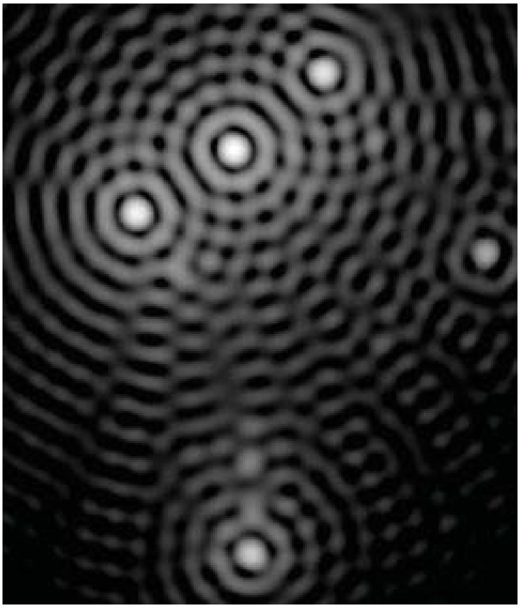
Fritz Albregtsen ved Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo, forteller: «Bakgrunnen for hele samarbeidet var at Bård var inne i bildet som en av flere kunstnere som kunne få oppdrag med å utsmykke det nye informatikkbygget på Blindern. Han ville gjerne ha en konkret relasjon mellom kunstverkene (som skal stå der lenge) og varige og viktige prinsipper i de fagfeltene som man arbeider med innenfor husets fire vegger. Så han søkte kontakt med oss ansatte, og siden han arbeider med bilder, så var det kanhende naturlig at vi som arbeider med digital signalbehandling og bildeanalyse var de som tente mest på idéen. Vi hadde mange og lange idé-dugnader, og etter hvert ble det til at Bård og jeg kom til å samarbeide om dette, og min sønn Thomas Nygreen ble hyrt inn som programmerer/problemløser og kontakt mot Petter Andreas Larsen.

Som gammel astrofysiker (og nå bildebehandler) var min første idé å avbilde et utsnitt av et kjent stjernebilde slik det ville se ut gjennom en bitte liten smultrings-aperture – som gir et ganske ekstremt diffraksjonsmønster. Her ser man ikke bare dette diffraksjonsmønstret fra en punktkilde, men interferens-mønstrene som dannes mellom diffraksjonsprofilen fra 42 punktkilder av forskjellig styrke innenfor et 6×7 graders utsnitt av stjernehimmelen, i dette tilfellet 'Orions Belte'.»

Christoph Kirfel, Universitetet i Bergen
christoph.kirfel@math.uib.no

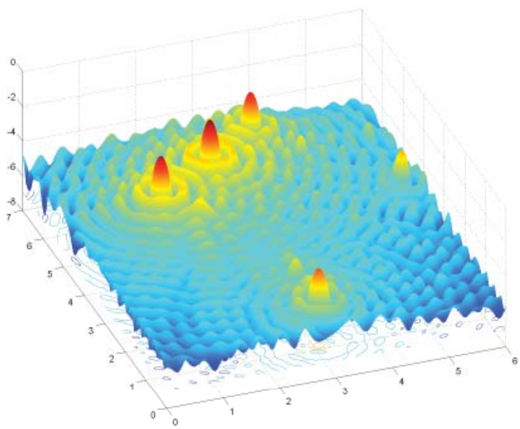
KORO er prosjektets oppdragsgiver. KORO (Kunst i offentlige rom) er statens fagorgan for kunst i offentlige rom og landets største kunstprodusent.

Figur 1. Stjernebildet Orion



Figur 2: Diffraksjonsprofil

Idéen til kunstverket kan sammenliknes med bølger som sprer seg i vannoverflaten og lager mønster. Idéen ble så modellert til en matematisk modell som beskriver hvordan «vannflaten» ser ut til et hvert øyeblikk når bølgene brer seg utover. Med denne modelleringen produseres det bilder på data.



Figur 3. Datamodellen

Modelleringen resulterer gjerne i noen matematiske formler. Nå må modellen tilpasses og justeres slik at Breivik finner den passende fremstillingen. Når finjusteringen og utvelgelsesprosessen er avsluttet blir dataene med den nøyaktige billedbeskrivelsen omformet til en modell som freses ut i isopor.

Figur 4. Isopormodellen

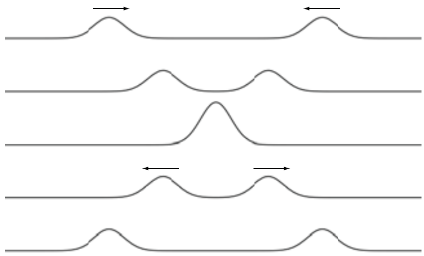
Dette er så forløperen til det endelige verket. Isopormodellen blir sendt til et verksted – i dette tilfelle i Kina – som hamrer ut det ønskete «landskapet» i syrebehandlet rustfritt 2 mm stål.

Figur 5. Arbeidet med skulpturen

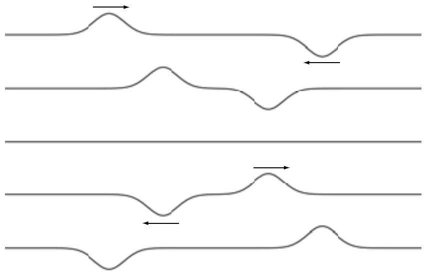
Det bildet som oppstår kan sammenlignes med et «frosset» bilde av bølger som brer seg utover fra flere punkter på en vannflate og lager et intrikat mønster.

Interferens er et fenomen i fysikken som nettopp beskriver hva som skjer når bølger møtes. Vi kan tenke oss en vannoverflate i et stillestående tjern og noen kaster en stein i vannet. Vi kjenner alle de ringformete bølgene som sprer seg fra det stedet der steinen treffer

Figur 6. Det endelige kunstverket «Orions Belte» ved Informatikkbygget, UiO. Fotomontasje: Petter Andreas Larsen



Figur 7. To bølgetopper møtes.



Figur 8. Utslag i «hver sin retning» kan «nulle ut» hverandre.

vannflaten og utover. Kaster vi to steiner samtidig to forskjellige steder i vannet vil det oppstå to bølgemønster med to «bølgesentre». Disse to bølgemønstrene vil etter hvert møtes og det oppstår interferens, eller «overlagring» av bølgene. På Bård Breiviks bilde ser vi tydelig minst fem slike bølgesentre.

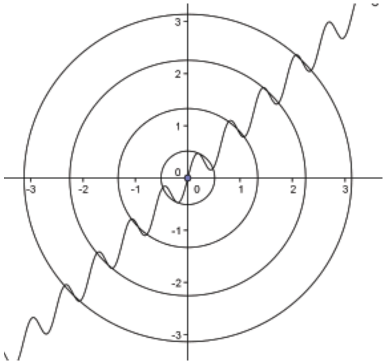
Vi skal i våre betraktninger studere et tilfelle der det er kun to slike sentre og se hvor spennende den matematikken er som må til for å beskrive allerede denne relativt enkle situasjonen. Da kan vi få en forsmak for hva som må til når Breiviks idéer skal settes ut i livet.

Nedenfor ser vi to bølger på vei mot hverandre. Når disse møtes vil resultatet av overlagringen komme frem ved at de enkelte utslagene adderes. To store positive utslag (oppover) vil overlagres til et kjempemessig utslag.

Når slike sinusbølger møtes, f.eks. når to steiner kastes i vannet samtidig, vil vi nettopp noen ganger få maksimal overlagring og noen ganger gjensidig utslettelse.

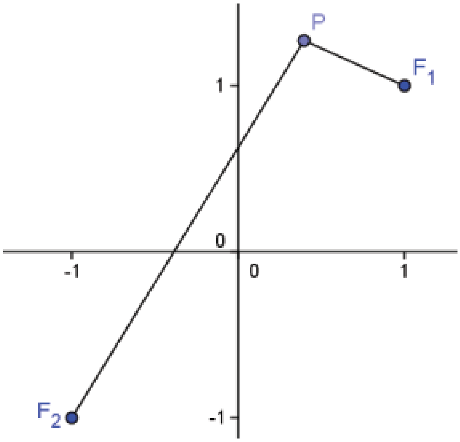
Vi ser nå bare på de stedene der bølgene «opphever» hverandre, slik at resultatutslaget av begge bølgene blir null. Det vil si at vannflaten på disse stedene verken løfter eller senker seg men derimot står i ro. Det viser seg at det danner seg store mønstre i vannflaten som ser ut til å være stasjonære, som altså ikke flytter på seg, enda bølgene er stadig i bevegelse. Disse mønstrene er nettopp alle de stedene der vannet «står i ro». På grunn av den konstante lysrefleksjonen vil disse mønstrene tre tydelig frem for vårt øye.

Vi må dukke litt dypere i matematikken. Går vi tilbake til situasjonen der en stein har truffet vannflaten ser vi at ringmønsteret som sprer seg rundt fokuset sett i tverrsnitt kan beskrives som en sinusbølge (figur 9). Bølgelengden er avstanden mellom to nabotopper til sinusbølgen. Vi kaller den for l. Vi undersøker nå et sted der differansen mellom avstanden fra de to sentrene F_1 og F_2 er en halv bølgelengde $l/2$. Når en bølgetopp fra det ene brennpunktet har nådd ut dit har nettopp en bølgedal fra det andre brennpunktet nådd dit. Har et «null-



Figur 9

punkt» fra det ene senteret nådd dit har også et nullpunkt fra det andre senteret nådd dit. Hele



Figur 10. Et punkt *P* og to faste brennpunkter F_1 og F_2

tiden vil «motsatte» utslag møtes i dette punktet, det betyr at vannflaten i dette punktet står i ro og reflekterer lyset jevnt til øyet vårt. Nå er det mange slike punkter som ligger slik til at differansen mellom avstandene fra brennpunktene er akkurat en halv bølgelengde og vi kan spørre hvilken geometrisk figur disse punktene danner. Spørsmålet blir altså:

Gitt to punkter F_1 og F_2. Finn alle punkter P slik at $|PF_1|-|PF_2|=L$ der L er en fast konstant, hos oss er det halve bølgelengden. Selvsagt er vi også interessert i de punkter P slik at $|PF_2|-|PF_1|=L$ (se figur 10).

Vi skal oversette denne egenskapen til punkter i et koordinatsystem og finne ligningen til kurven som hører til. Som brennpunkter velger vi punktene F_1 = (1, 1) og F_2 = (–1, –1). For et punkt kan vi da beregne avstandene $|PF_1|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ og $|PF_2|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$. Som fast differanse velger vi L = 2. Da får vi

$$|PF_1|-|PF_2|=2$$

dvs.

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2$$

eller

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+2$$

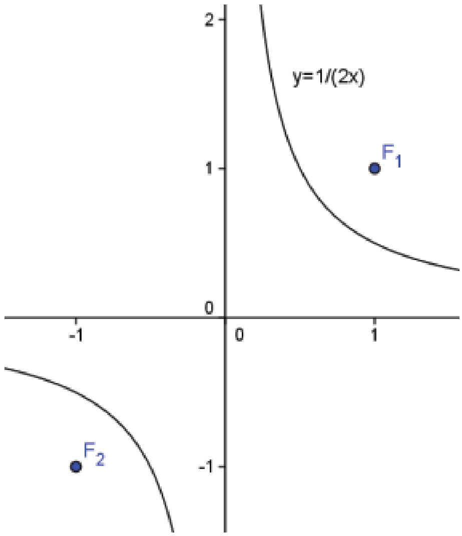
Etter kvadrering får vi

$$(x+1)^2+(y+1)^2=(x-1)^2+(y-1)^2$$
$$+4+4\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

Heldigvis faller mange av de kvadratiske leddene vekk når vi rydder opp i denne likningen og vi står igjen med

$$x+y-1=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

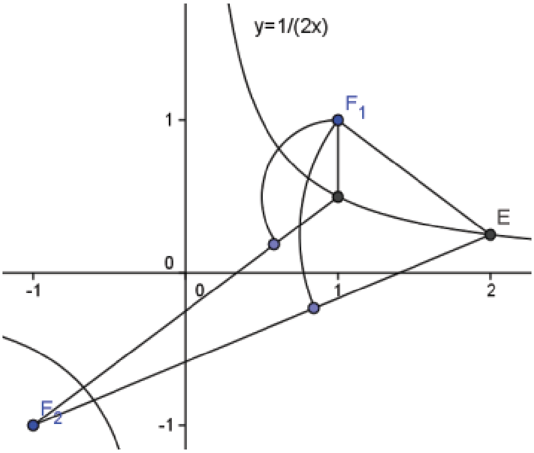
Ny kvadrering gir



Figur 11. Hyperbelen y = 1/(2x) med brennpunkter

$$
\begin{aligned}
&(x+y-1)^2=(x-1)^2+(y-1)^2\\
&x^2+y^2+1+2xy-2x-2y=\\
&x^2-2x+1+y^2-2y+1\\
&2xy=1\\
&y=\frac{1}{2x}
\end{aligned}
$$

Denne funksjonen kjenner vi igjen som en hyperbel der x- og y-aksen er asymptotene (figur 10).



Figur 12. To hyperbelpunkter med sine respektive avstander til brennpunktene

Den beskriver altså det geometriske stedet der alle punktene ligger slik at differansen mellom avstandene fra brennpunktene er en konstant. I bølgeeksperimentet vårt er disse punktene i ro og vi ser dem tydelig som mønster på overflaten. Vi ser på noen punkter på hyperbelen for å overbevise oss om at avstandsdifferansen til brennpunktene er konstant. Punktet (1, 1/2) og punktet (2, 1/4) ligger på hyperbelen. I tabell 1 nedenfor har vi regnet ut avstanden til de to brennpunktene og differansen mellom disse avstandene, se også figur 12.

Punkter som ligger slik at differansen mellom avstandene fra brennpunktene er en hel bølgelengde vil av samme grunn være steder som er maksimalt «urolige».

Hyperbler der avstandsdifferansen er tre halve bølgelengder vil igjen være rolige soner, det samme gjelder fem halve bølgelengder osv. Disse kan en også observere i eksperimentet når forholdene er gode. I en laboratoriesituasjon kan en rigge til et vannkar med konstant vanndybde der to pulserende stifter berører vannflaten i en regelmessig takt med samme puls. Her vil vi kunne se hyperbler av «første» orden (differanse lik halve bølgelengde) og hyperbler av høyere orden.

Figur 13. Hyperbelformete bølgemønster.
Foto: Komet Naturfag A/S

$P(x, y)$	$\lvert PF_1\rvert$	$\lvert PF_2\rvert$	$\lvert PF_2\rvert-\lvert PF_1\rvert$
(1, 1/2)	$\sqrt{(1-1)^2+(\frac{1}{2}-1)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{(1+1)^2+(\frac{1}{2}+1)^2}=\sqrt{\frac{16+9}{4}}=\frac{5}{2}$	2
(2, 1/4)	$\sqrt{(2-1)^2+(\frac{1}{4}-1)^2}=\sqrt{\frac{16+9}{16}}=\frac{5}{4}$	$\sqrt{(2+1)^2+(\frac{1}{4}+1)^2}=\sqrt{\frac{144+25}{16}}=\frac{13}{4}$	2

Tabell 1