Helge Jellestad, Laksevåg videregående skole

Matematikk og kart – et undervisningsopplegg for ungdomstrinnet og videregående skole

Kart er en grei tilnærming til trigonometri. Avstanden mellom koordinatene kan beregnes med enkle metoder. Kart og kompass kan skaffes til overkommelig kostnad. Teodolitter er dyre og tunge. Få skoler har tilgang til slikt utstyr. Mange mobiltelefoner er utstyrt med GPS (Global Positioning System). Dette er utstyr elevene har og som de enkelt kan lære å nyttegjøre seg. GPS enheter er dessuten blitt mye rimeligere og mer nøyaktig med årene. Kart på Internett gir også mulighet til å finne posisjonskoordinater i ulike formater. Denne oppgaven tar for seg bruk av kart, kompass, GPS og Internett, og viser noen av mulighetene slikt utstyr gir innen matematikkundervisningen. Vi skal først se på jordkloden som koordinatsystem, deretter på bruk av kart, GPS og tilslutt på Internett som redskap i matematikkopplæringen.

Bruk av kart og kompass

Kompasset består av tre deler, kompassnålen, kompasshuset og kompassplaten. Den røde enden av kompassnålen peker mot nord. Kompasset må alltid ligge vannrett for at kompassnålen skal bevege seg fritt. Kartet må orienteres slik at meridianene peker mot nord. Nord er alltid rett opp, sør rett ned, øst til høyre og vest til venstre på kartet. For å orientere kartet legges kompasset på kartet. Kartet dreies mens kompasset ligger på det slik at kompassnålen blir liggende parallelt med meridianene på kartet, med nordpilen pekende mot nord.

Figur 1, De viktigste delene på kompasset.

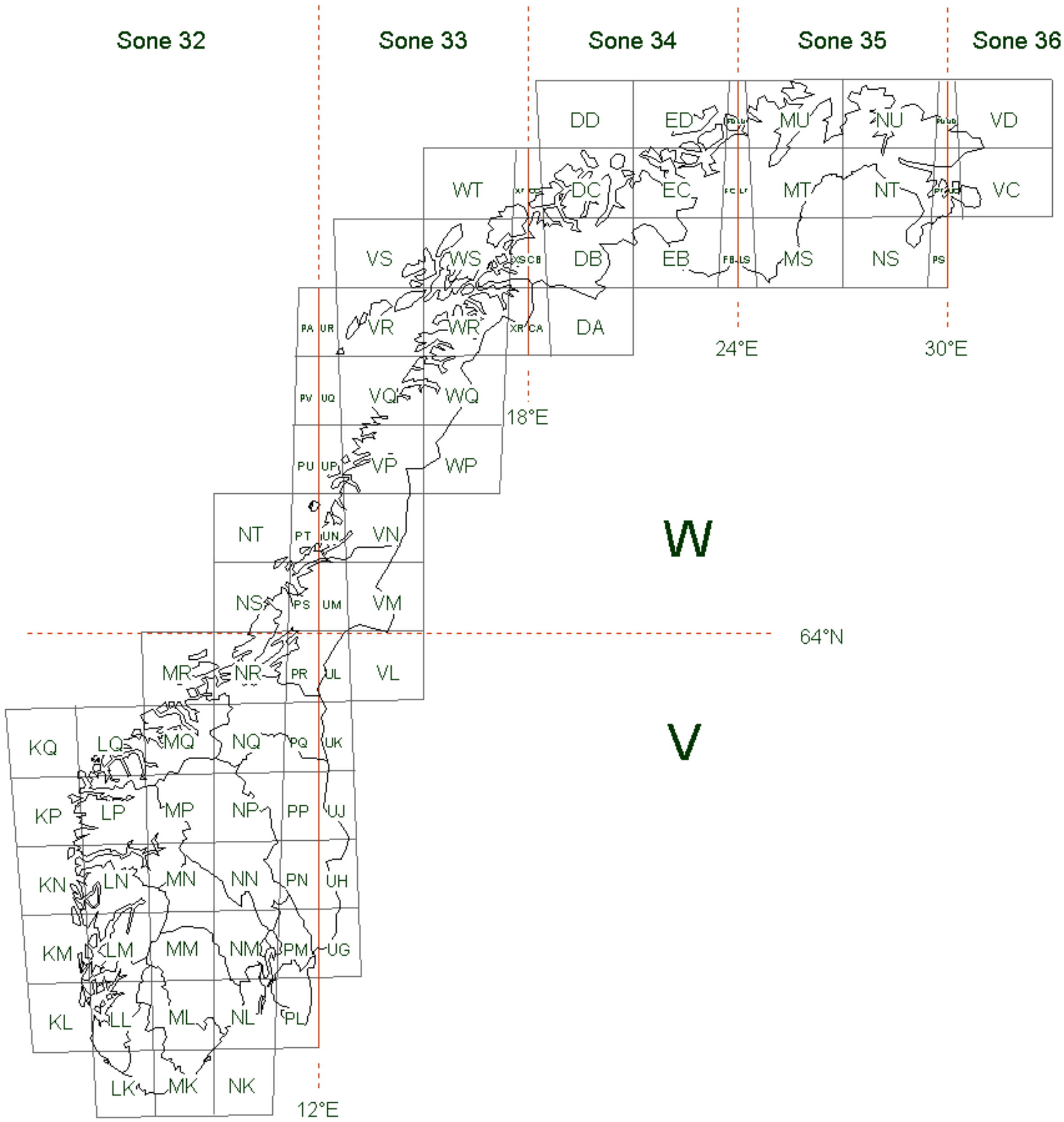
Hvis sikten er dårlig eller du skal bevege deg over større avstander er det sikrest å gå etter kompasskurs. Kompasset legges på kartet slik at kanten ligger nøyaktig gjennom punktet du står i og punktet du skal til (A til B). Kompasshuset dreies slik at nordlinjene i bunnen av kompasshuset blir parallelle med meridianene på kartet. Korriger for missvisning. Ved vestlig missvisning legges antall grader til, og ved østlig trekkes de fra. Kompasset holdes så vannrett med marsjretningspilen pekende fremover. Man beveger seg så rundt til magnetnålen dekker nordpilen i kompasshuset, marsjretningspilen peker nå i marsjretningen. Retningen kan leses av i grader. Kompasshuset har 360° eller 400° skala.

Figur 2, Kompasskurs.

Oppgaver med kart og kompass kan være å finne punkter på kartet, kompasskursen fra et punkt til et annet, hvor mange høydemeter er det fra et punkt til et annet eller hvor langt er det fra et punkt til et annet?

Hvor i all verden?

Det vanligste koordinatsystemet for kart er UTM (Universal Transvers Merkator) som ble utviklet av US Army i 1947. Det er enklere å bruke, enn bredde- og lengdegrader fordi man slipper å regne med minutter og sekunder. GPS kan oppgi posisjon i UTM koordinater. Disse kan leses direkte av kartet eller GPS enheten. Hele verden er delt inn i ruter. Dette er gjort fordi jorden ikke er flat og vi må se på små deler av den for at de skal se flate ut. Hver rute har et tall, fra 1 til 60, for sonens øst-vest plassering, og en bokstav, fra C til X (uten I og O), for nord-sør plassering. Vi skal se nærmere på rute 32V der det meste av Sør Norge ligger. Alle tall i UTM systemet er i meter.



Figur 3, UTM ruteinndeling for Norge.

Ruteinndeling

Rutene med to bokstavers benevning er 100 kilometer ganger 100 kilometer. Bergens-kartet, Blad 1416II i M711 serien har deler av 4 ruter som heter 32V KN, 32V KM, 32V LN og 32V LM.

Δ 477 Løvstakken ligger i ruten som heter 32V KM.

x 400 Fløyfjellet ligger i ruten som heter 32V KN.

x 637 Vardeggen ligger i ruten som heter 32V LN.

Δ 673 Haugavarden ligger i ruten som heter 32V LM.

På den nederste delen av kartet er det kartopplysninger som viser hvordan koordinatsystemet brukes.

<table>
<tr><td rowspan="5">SONEBELTE
GRID ZONE DESIGNATION

32V

100KM-RUTE
100.000 M SQUARE IDENTIFICATION
00
I
KN I LN
-------I-------
KM I LM
I
00</td><td>KARTREFERANSE
100M - RUTE</td><td colspan="3">EKSEMPEL:
SAMPLE POINT: X Ulriken</td><td>Engelsk...</td></tr>
<tr><td>100KM – RUTE
(JFR. FIG TIL VENSTRE)

FØRSTE RUTELINJE TIL VENSTRE FOR PUNKTET.

AVSTAND I TIDELER AV RUTEN FRA RUTELINJEN.

FØRSTE RUTELINJE UNDER PUNKTET.

AVSTAND I TIDELER AV RUTEN FRA RUTELINJEN.</td><td>LM</td><td>00

8</td><td>98

9</td><td></td></tr>
<tr><td>RUTETILVISNING</td><td colspan="3">LM008989</td><td></td></tr>
<tr><td>Det er 18° til neste punkt med lik tilvisning. Referanse til sonebelte gjør tilvisningen fullstendig.</td><td colspan="3">32VLM008989</td><td></td></tr>
<tr><td>SMÅ rutetall gir full koordinat.
Bruk bare STORE tall i tilvisningen.</td><td></td><td>$^{3}\underline{00}^{800}$</td><td>$^{66}\underline{98}^{900}$</td><td></td></tr>
</table>

Figur 4, Kartopplysninger.

Fullstendig kartreferanse for Ulrikens topp er dermed 32VLM008989 eller 32V 0300840 6698912 som det vises på GPS enheten. Legg merke til at GPS enheten viser posisjonen med flere siffer.

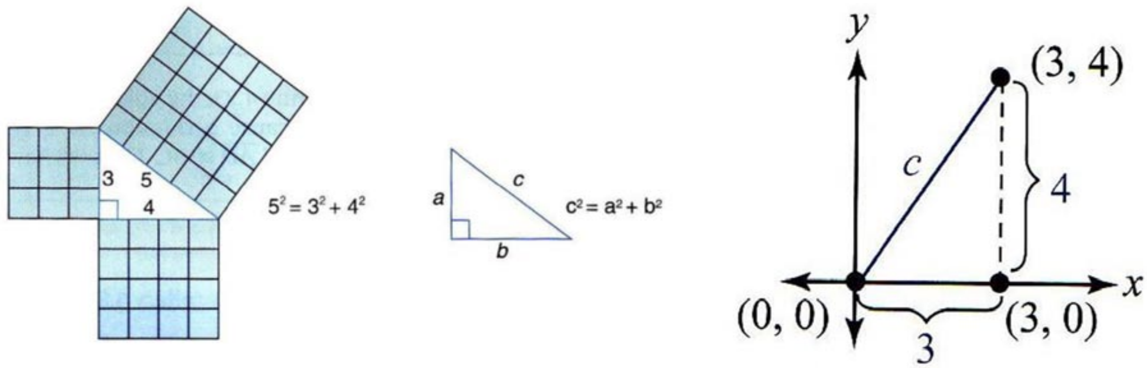
Rutene på kartet er 1 kilometer, man kan anslå posisjon på kartet til nærmeste 100 meter eller 50 meter hvis man er svært nøyaktig. Med GPS er det lettere å finne en mer nøyaktig posisjon. GPS gir oss 7 siffer for nord-sør anvisning og 7 siffer for øst-vest anvisning, der siste siffer er meter. Tabell 1

<table>
<tr><td colspan="2">SONE</td><td colspan="7">ØST-VEST</td><td colspan="7">NORD-SYD</td></tr>
<tr><td>ØV</td><td>NS</td><td colspan="2">LM
100km</td><td>10km</td><td>1km</td><td>100m</td><td>10m</td><td>1m</td><td colspan="2">LM
100km</td><td>10km</td><td>1km</td><td>100m</td><td>10m</td><td>1m</td></tr>
<tr><td>32</td><td>V</td><td>0</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>8</td><td>0</td><td>0</td><td>6</td><td>6</td><td>9</td><td>8</td><td>9</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

GPS kan i teorien gi oss en nøyaktighet på ned til 1 meter, men gjør det sjelden.

Pytagoras satt i (koordinat)system

Det Pytagoreiske teorem er et av de mest berømte fra det gamle Hellas. Det sier oss at arealet av kvadratet til hypotenusen i en rettvinklet trekant er lik summen av arealene av kvadratene til katetene. Vi kan bruke dette teoremet til å finne avstanden mellom to punkter. Som vist på figur 5 kan avstanden fra punktet (3,4) til punktet (0,0) beregnes ved å tegne en rettvinklet trekant der katetene har lengden 3 og 4. Avstanden blir 5.



Figur 5, Koordinater og Pytagoras.

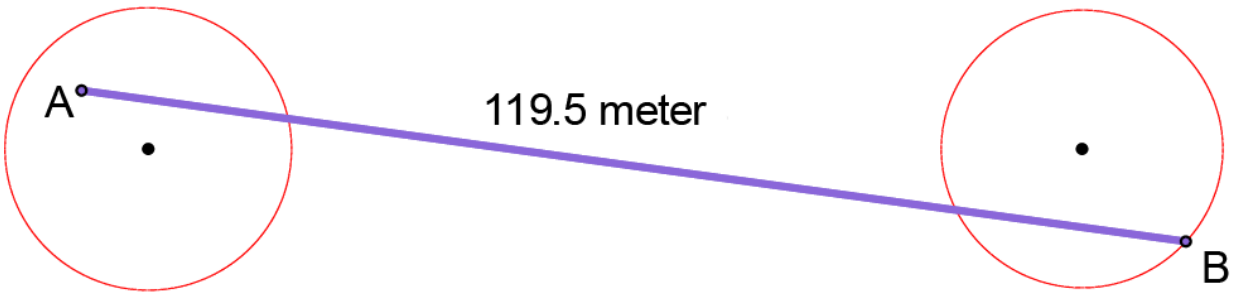
Hvis vi i stedet for punktene (3,4) og (0,0), bruker (x_1,y_1) og (x_2,y_2), blir lengden til katetene $| x_2-y_2|$ og $| y_2-y_1|$. Dette gir oss distanseformelen for avstanden mellom to vilkårlige punkter.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$

Oppgaver med UTM og kart. Elevene får utdelt kart og må finne koordinatene til fire trigonometriske punkter og alle avstandene mellom dem. Formler og koordinater blir lagt inn i regneark og avstandene regnes ut.

Hvor unøyaktig er beregninger med GPS?

NAVSTAR GPS er et Globalt Posisjonerings System. Det er et satellittbasert system der en mottagerenhet får signaler fra flere satellitter, beregner avstanden til hver av dem og viser hvor du er i et globalt koordinatsystem. GPS systemet består av 24 satellitter som har to omløp rundt jorden hvert døgn. GPS enheten må ha signaler fra minst 3 satellitter for å kunne fungere og minst 4 for å beregne høyde. Systemet ble laget for militært bruk på 1970-tallet av det amerikanske forsvaret. På 1980-tallet ble systemet frigitt til sivil bruk. GPS virker uavhengig av værforhold, over hele verden, døgnet rundt og har en nøyaktighet på ned til 1 meter. GPS mottakere er nå svært nøyaktige sammenlignet tidligere modeller. De kan likevel gi avvik på opp til 15 meter. GPS nøyaktighet er avhengig av satellittenes posisjon på himmelen og påvirkning fra topografi og atmosfæriske forhold. Vi skal nå se på hvordan målenøyaktigheten påvirker utregningen av avstandene.   Vi har punktene A og B som vi har beregnet ligger 100 meter fra hverandre. Punktene A og B kan i midler tid ligge hvor som helst innenfor en sirkel med diameter på 15 meter. Tenk deg mulighetene for plassering av punktene A og B. Den minste mulige avstanden mellom punktene er 70 meter (100 – 2(15)). Den største mulige avstanden mellom dem er 130 meter (100 + 2(15)). Hvis vi lar d være avstanden fra A til B, kan vi si at $70 \leq d \leq 130$ eller med intervall notasjon: $d \in [70,130]$ som er konfidensintervallet til d.



Figur 6, GPS nøyaktighet.

Etter å ha gjennomgått denne leksjonen får elevene følgende oppgave:
Hvis GPS enheten viser nøyaktighet på mindre enn 10 meter, er den i WAAS mode. På en fin skyfri dag, kan målenøyaktigheten være 3 meter som vist på figuren. Hvis *d* er avstanden fra A til B, hva er den minste og den største mulige avstanden, hvis den beregnede avstanden er 200 meter? Hva er konfidensintervallet for d? Hva er konfidensintervallet for avstanden mellom to punkter på kartet, når målenøyaktigheten er 3 meter? Hvor mange prosent utgjør denne feilen?

Er firkanten rettvinklet?

Firkanter som fotballbaner, idrettsplasser og noen bygninger har rettvinklede hjørner. Uten rette vinkler i hjørnene, kan de ha parvis like sider uten å være et rektangel. De er da parallellogrammer. Vi kan undersøke om vinklene er rettvinklede ved å bruke det Pytagoreiske teorem og diagonalene som vist nedenfor. Vi bruker avstandene vi får ved hjelp av Pytagoras teorem for å undersøke om lenden til de to diagonalene er like. Elevenes oppgave er å finne ut om en idrettsplass er rektangulær. De måler hjørnene på banen med GPS og setter UTM koordinatene inn i tabellen. Tabell 2.

PUNKT	NORD	ØST
1		
2		

3		
4		

Deretter regner de ut avstanden mellom punktene.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$

Og tilslutt må de regne ut diagonalene.

Tabell 3.

PUNKT	**Sidelengde i meter (d)**	**Diagonallengde (D^2=d^2+d^2)**
d=(1 og 2)		
d=(2 og 3)		
d=(3 og 4)		
d=(4 og 1)		

Er firkanten et rektangel? Hvis banen ikke har rette vinkler i alle hjørnene, hvilke vinkler er for store og hvilke er for små?

Vinkler

Trekanten er trolig den mest brukte geometriske form. Trekanten er den eneste geometriske figuren som ikke endrer form selv om hjørnene er leddet. Et sett med sider gir kun et sett med vinkler i en trekant. Dette er ikke tilfellet for andre geometriske figurer som firkanter, femkanter og sekskanter. Trekanter kan derfor brukes til konstruksjon av stive objekter.

To trekanter er formlike hvis vinklene i den ene trekanten er kongruente med vinklene i den andre trekanten eller hvis forholdet mellom de korresponderende sidene er likt. En trekant kan være stor og den andre liten, men de har samme form fordi vinklene er make. Et eksempel på dette er når vi oppretter en normal fra hypotenusen til toppunktet i den rette vinkelen, vi får to nye trekanter som er formlike med den opprinnelige trekanten.

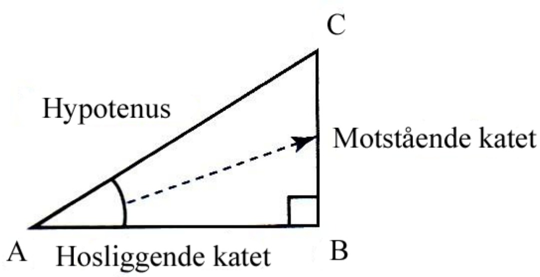
Dette fungerer fordi begge de nye trekantene har en av vinklene fra den opprinnelige trekanten. Summen av vinklene i trekanten er 180°. Hvis to rettvinklede trekanter har en av vinklene fra den opprinnelige trekanten og en ny 90° vinkel, må den siste vinkelen være lik den andre vinkelen i den opprinnelige trekanten.

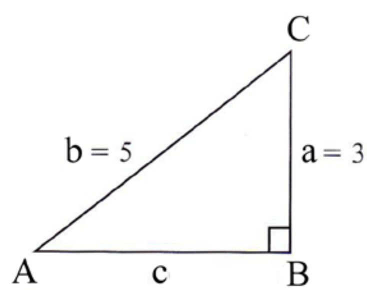
Lengden av korresponderende sider i formlike trekanter har samme forhold. Dette er utgangspunktet for en del av matematikken som kalles trigonometri. I tabell 4 er de tre viktigste definisjonene innen trigonometri, med utgangspunkt i figur 5.

Tabell 4.

Trigonometriskforhold	Forkortelse	Verdi
Sinus	sin	$\sin A = \dfrac{\text{lengden av motstående katet}}{\text{lengden av hypotenusen}}$
Cosinus	cos	$\cos A = \dfrac{\text{lengden av hosliggende katet}}{\text{lengden av hypotenusen}}$
Tangens	tan	$\tan A = \dfrac{\text{lengden av motstående katet}}{\text{lengden av hosliggende katet}}$

Sinus, cosinus, og tangens verdier er konstante for enhver vinkel fordi alle rettvinklede trekanter med en lik vinkel, utenom den rette, er formlike. Hvis vi måler en vinkel, og deretter finner den trigonometriske verdien i en tabell eller med en lommeregner, trenger vi kun å måle en side av trekanten for å finne lengden av de to andre sidene. Motsatt kan vi, hvis vi kjenner lengden av de tre sidene, finne hva de trigonometriske funksjonene til alle vinklene i trekanten er og deretter ved hjelp av en tabell eller lommeregner med inverse trigonometriske funksjoner kan vi finne størrelsen på vinklene i trekanten. Hvis trekanten er rettvinklet trenger vi bare lengden av to sider, fordi vi kan bruke Pytagoras setning til å finne den tredje siden.





Figur 8, .

Figur 7 viser navnsetting på trekanter. Vinklene er navnsatt med store bokstaver. Motstående side til vinkelen er navnsatt med samme, men liten, bokstav. Med Pytagoras setning kan vi finne at $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Ved hjelp av definisjonene til de trigonometriske funksjonene kan vi finne verdiene for alle de tre vinklene. For vinkel A ser vi at $\sin A = \frac{3}{5}, \cos A = \frac{4}{5}$ *og* $\tan A = \frac{3}{4}$. Når vi skal finne hvor mange grader vinkel A er må lommeregneren være innstilt på grader og vi bruker den inverse funksjonen til tangens (tan^{-1}) og forholdet mellom a og b som er 3 til 4 eller 0,75. Vinkel A er $tan^{-1}(0.75) =$ er 36.87°.

Sinussetningen

Med sinussetningen kan vi finne manglende sider eller vinkler i trekanter.

$$\frac{Sin\ A}{a} = \frac{Sin\ B}{b} = \frac{Sin\ C}{c}$$

Forholdet mellom vinklene og motstående side er lik for alle vinklene i en trekant. For å bruke sinussetningen, til å finne en ukjent side, må vi kjenne forholdet mellom en vinkel og dens motstående side og motståendevinkelen til siden som skal finnes.

Cosinussetningen

Cosinussetningen brukes til å finne sidene i alle trekanter ikke bare rettvinklede.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cosA$$

Pytagorassetning er et spesialtilfelle av denne der $\cos 90 (= 0$, noe som fører til at det siste leddet blir lik 0. For å bruke denne, til å finne den ukjente siden, må vi kjenne to sider og vinkelen mellom dem. Det er også mulig å finne vinkelen mellom to av sidene ved å omforme formelen med hensyn til cos A og bruke den inverse av den $(\cos^{-1} A)$ til å finne vinkelen.

$$cosA = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2 \cdot b \cdot c}$$

Elevenes oppgaver etter denne leksjonen er å finne alle vinklene mellom fire punkter på kartet, enten ved å oppsøke dem med GPS eller ved å finne koordinatene på kartet. Vinklene må finnes ved hjelp av de trigonometriske funksjonene.

Areal

Polygoner er lukkede figurer som består av rette linjer i et plan. Hvis alle sidene har samme lengde kalles figurene regulære polygoner. Vi kan finne arealet til alle polygoner ved å dele dem opp i trekanter og deretter bruke Pytagoras sin setning eller trigonometri.

Til dette kan vi bruke arealsetningen. Vi må da kjenne to sider og vinkelen mellom dem.

$$Arealet = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

En oppgave til dette emnet kan være å finne arealet av polygonen som dannes av fem punkter på kartet.

Geocaching

Norgesglassiden til Statens kartverk er en nyttig side med adresse http://ngis2.statkart.no/norgesglasset/default.html. På denne siden kan man søke etter koordinater til stedsnavn og adresser. Man kan også peke på kartet på dataskjermen med markøren og få koordinatene der man peker med en meters nøyaktighet. De oppgis i Grader minutter og sekunder, Desimalgrader, Desimalminutter, UTM og MGRS. Disse kan brukes i matematikkundervisningen hvis man ikke har tilgang til kart eller GPS.

Geocaching er en slags orienteringslek med GPS. Det ligger poster, som kalles cacher (kæsjer), over hele verden og det finnes over 500.000 av dem. Det ligger noen der du bor. Du kan finne kart med posisjoner til cacher en du aner på www.geocaching.com. Det er flere typer cacher. Den vanligste er en vanntett plastboks med loggbok, blyant og kanskje noen andre småting. Størrelsen kan variere fra filmbokser til store kasser. Haike cacher eller ”travel bugs” er et objekt som blir tatt med fra en cacheboks til en annen. Bevegelsene blir lagt inn på Internettet. Virtuelle cacher inneholder ingenting og er kun stedet den er plassert. De kan logges elektronisk på internett med et bilde.

Geocacher kan finnes på flere måter. Det kan legges ut en cache der koordinatene ligger på internett. Denne kan inneholde instruksjoner og oppgaver, gjerne matematiske, der svaret er koordinatene til en eller flere nye cacher med oppgaver. Et eksempel på en slik cache, uten matematiske oppgaver, ligger på Gullsteinen syd for Løvstakken i Bergen. Den inneholder koordinatene til flere cacher i området. Elevenes oppgave er å finne denne cacheen, og deretter resten av cachene. For uten en fin tur vil de trolig lære litt om koordinatsystemer.