

## Skrijving i matematikkfaget

Det har rett som det er vært skrevet i Tangenten om forskjellige typer programvare til bruk i matematikkundervisningen. Mest omtalt er konstruksjonsprogram (Cabri, GeoGebra, GEONExT,) og regneark. Disse kan brukes til å utforske matematiske sammenhenger med, både visuelt og numerisk. Også CAS-verktøy (TI-Nspire, Wiris, wxMaxima) har litt senere kommet til i verktøykassen med utforskning og symbolsk beregning som hovedformål. I læreplanen for R1 og R2 blir slike verktøy påkrevd. Vi har også kunnet lese om nettbaserte Java- eller Flash-spill (<http://www.matematikk.org/>) som kan brukes i matematikkundervisningen. Alle disse verktøyene har sin plass i læreplanen. Mindre omtalt er hvordan man skriver digitale matematiske tekster. Dette kan komme av at noen anser det som velkjent, men for de som ikke kjenner til det er det selvsagt ikke så lett! I denne artikkelen vil vi si noe om skrijving som en grunnleggende ferdighet i matematikkfaget, før vi viser hvordan den nye formeeditoren i Microsoft Word 2007 kan brukes til digital matematikkskrijving.

### Å uttrykke seg skriftlig i matematikk

Skrijving regnes etter Kunnskapsløftet som en grunnleggende ferdighet i alle fag. I den gjennomgående læreplanen for fellesfaget matematikk heter det:

*Å kunne uttrykke seg skriftlig i matematikk inneber å løse problem ved hjelp av matematikk, beskrive og forklare ein tankegang og setje ord på oppdagingar og idear. Ein lagar teikningar, skisser, figurar, tabellar og diagram. I tillegg nyttar ein matematiske symbol og det formelle språket i faget.*

Vi ser at læreplanen kobler skriveferdigheter direkte til matematiske kompetanser (Niss & Højgaard Jensen, 2002) som problemløsning, kommunikasjon, tankegang, symbolbruk og representasjoner. Skrijving i matematikkfaget er altså noe mer enn produksjon av sluttprodukter i form av pene sammenhengende tekster der man forklarer en framgangsmåte eller presenterer svaret på en oppgave. Skrijvingen er i stor grad en *prosess*, og det er nyttig å merke seg at læreplanen også regner tegninger, skisser, tabeller og diagram som matematisk skrijving.

Morten Misfeldt har i sin doktoravhandling (Misfeldt, 2006) dokumentert matematiske skriveprosesser hos studenter og matematikere. Han fant at skrijvingen har flere funksjoner i matematikkfaget:

1. Som støtte for tanken. Ofte i form av skisser, systematiske oppstillinger, kontrollregning og "rablerier" der hensikten er å få nye ideer, prøve ut matematiske ideer eller å se sammenhenger.
2. Informasjonslagring for senere bruk.
3. Kommunikasjon med andre.
4. Produksjon av en ferdig matematisk tekst i form av en oppgaveinnlevering eller en vitenskapelig artikkel.

Misfeldt viser at håndskrift fortsatt er svært viktig i matematikkfaget. De fleste opplever håndskrift som enkelt og effektivt, man får en direkte og "fysisk" opplevelse, og man er ikke bundet av et lineært innskrivingsformat som på et tastatur – hele tegneflaten er direkte tilgjengelig når man

skriver for hånd. Dette gjelder særlig der skrijvingen fungerer som støtte for tanken, og i en viss grad i forbindelse med informasjonslagring til senere (personlig) bruk.

### En matematikkoppgave

Prøv å løse følgende oppgave (Lindstrøm, 2006). Merk deg i hvilken grad og hvordan du benytter deg av skrijving som et verktøy i selve løsningsprosessen. Hvordan ville du benyttet deg av skrijving dersom du skulle presentert løsningen for en gruppe elever i et klasserom?

*Marit sier til sin nye venninne: "Jeg har tre barn, og hvis du ganger sammen aldrene deres får du 36". "Og hvis jeg legger sammen aldrene deres, hva får jeg da?", spør venninnen. "Da får du husnummeret vårt", svarer Marit. Venninnen ser på husnummeret, og tenker litt: "Jeg vet fortsatt ikke hvor gamle de er". "Det gjør ikke noe", sier Marit, "for det er bare den eldste som ikke har lagt seg ennå". "Men da vet jeg hvor gamle de er", sier Marits venninne og smiler.*

*Hvor gamle er barna, og hvilket husnummer har Marit?*

Vi tror de fleste foretrekker håndskrift som støtte for tankene i forbindelse med løsninger av oppgaver som denne, mens det i andre sammenhenger vil være nyttig å benytte dynamisk programvare eller et tekstbehandlingsprogram til slik tankestøttende skrijving.

### Å bruke digitale verktøy i matematikk

Digital kompetanse regnes som en annen av de grunnleggende ferdighetene i Kunnskapsløftet. I den gjennomgående læreplanen for fellesfaget matematikk heter det:

*Å kunne bruke digitale verktøy i matematikk handler om å bruke slike verktøy til spel, utforskning, visualisering og publisering. Det handler òg om å kjenne til, bruke og vurdere digitale hjelpemiddel til problemløsning, simulering og modellering. I tillegg er det viktig å finne informasjon, analysere, behandle og presentere data med høvelege hjelpemiddel, og vere kritisk til kjelder, analysar og resultat.*

I dette ligger det blant annet en forventning om at elevene skal kunne skrive og presentere matematikk ved hjelp av digitale verktøy. Som vi så i oppgaveeksempelet ovenfor, er håndskrift nyttig og viktig i forbindelse med skrijving i matematikkfaget. Men digital håndskrift er ikke bare enkelt: For det første kreves det tilleggsutstyr i form av digital tavle, tablet-PC, skriveplate eller skanner. Dessuten er ikke eksisterende teknologi for gjenkjenning av håndskrift (OCR) særlig god til å håndtere matematiske tegn og symboler. Dette gjør digital håndskrift mindre velegnet i forhold til informasjonsdeling, søkbarhet og lagring. Dessuten er ikke alles håndskrift like sirlig og lettlest. For å oppfylle læreplanens mål, og med tanke på skrijvingens ulike funksjoner i matematikkfaget (Misfeldt, 2006), må norske lærere og elever kunne skrive matematikk effektivt både for hånd og "på data". Vi vil gjerne understreke at det her er snakk om både-og. Papir og blyant er fortsatt et uvurderlig godt hjelpemiddel som elevene må få opplæring og trening i å bruke på en effektiv måte i matematikken.

### Å skrive matematikk med Word 2007

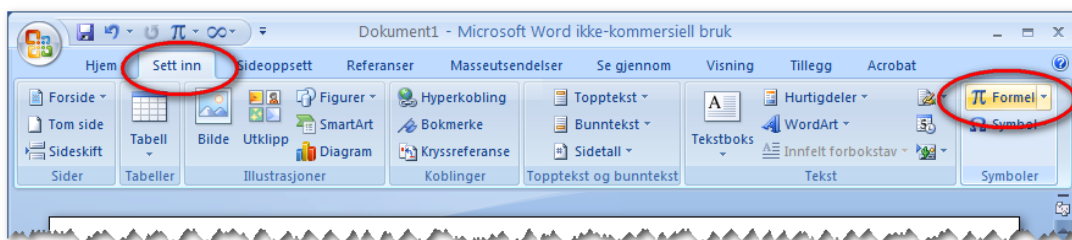
Det er ikke så lenge siden det var vanskelig å skrive matematikk som så pen ut på en datamaskin. Men det er faktisk også ei god stund siden vi fikk verktøy til å hjelpe oss i dette. Allerede i 1984 kom LaTeX (<http://no.wikipedia.org/wiki/LaTeX>), et slags "formateringspråk" basert på TeX, der en av tingene man kunne gjøre var å formatere innskrevne koder slik at de ble pen matematikk som i ei lærebok. Problemet var bare at de aller fleste vanlige databrukere syntes at LaTeX var tungt å lære

seg. Men etter hvert kom også programvare som gjorde det enklere og skrive LaTeX, og disse brukte i større grad det grafiske grensesnittet man kjenner fra for eksempel Windows-programmer for å gjøre ting enklere for brukeren. Kjente eksempler på slike programmer er Scientific-serien fra MacKichan software (<http://www.mackichan.com/>). Men det var nok først da det kom en matematikkeditor i tekstbehandleren Microsoft Word, at det å skrive matematikk på datamaskin ble enkelt og lett tilgjengelig for mange. Her kunne man bruke den innebygde og forholdsvis enkle formeledatoren som kom med Word, eller man kunne betale for å få utvide den med tillegget MathType (<http://www.dessci.com/en/products/mathtype/>), som også er i utstrakt bruk i dag. Ringen sluttet når vi i Word 2007 har fått en formeledator der man kan skrive LaTeX-koder direkte. En stor fordel med Word 2007, er at man ikke *må* kunne LaTeX-kodene, men man kan øke skrivehastigheten betydelig ved å lære seg kodene for uttrykk man ofte skriver.

Formeledatoren i Word 2007 er ganske annerledes enn den som fulgte med tidligere versjoner av Word. Tre ting er verdt å legge merke til.

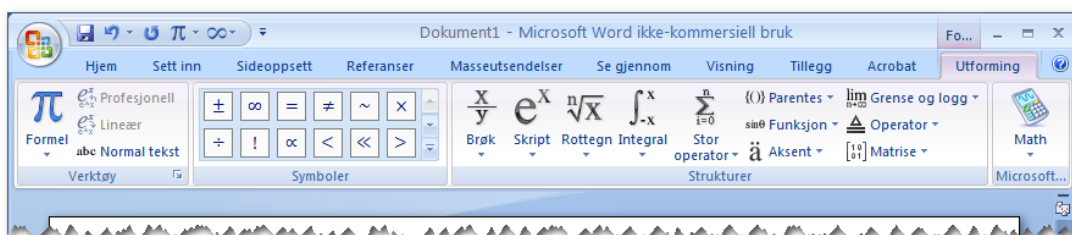
1. Formeledatoren er endret slik at det skal bli mindre klikking. Kan du noen LaTeX-koder kan du skrive matematikk fortløpende der du vil i dokumentet ditt, kun ved å bruke tastaturet.
2. Editoren er "smartere" enn før. Den omformer uttrykk fortløpende mens man skriver.
3. Du kan laste ned og bruke et gratis tillegg fra Microsoft til å lage grafer og løse enkle likninger inne i Word. Dette tillegget kan utvides ytterligere ved å kjøpe fullversjonen. Vi skal vise fram det som du kan gjøre med gratisversjonen.

## Formeledatoren



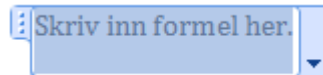
**Figur 1** Du aktiverer Formeledatoren ved å velge **Sett inn**-fanen, og så trykke på **Formel**-knappen. Hurtigtasten for å komme til formeledatoren er **[Alt]+=**.

Har du siste versjon av Word så har du automatisk en kraftfull måte å skrive matematikk på. Du aktiverer Formeledatoren ved å velge **Sett inn**-fanen, og så trykke på **Formel**-knappen (Figur 1). Hurtigtasten for å komme til formeledatoren er **[Alt]+=**. Du må trykke **[shift]** for å få til tegnet for *er lik*, altså skal tre taster holdes nede samtidig her. Øverste del av Word skifter da utseende slik Figur 2 viser.



**Figur 2** Toppfanen i Word 2007 slik den ser ut når formeledatoren er aktiv.

Dette er toppfanen som hører til formeleditoren. Har du prøvd tidligere versjoner av formeleditoren ser du at dette er ganske forskjellig. Når du har aktivert formeleditoren vil det videre dukke opp en



slik boks i dokumentet ditt:

Denne boksen kan du skrive matematikk i. Når du skriver vil teksten fortløpende endres til "pretty print", altså slik matematikk skal se ut i ei lærebok. Hvis du skriver  $x^2 + 2x = 4$  vil dette automatisk se slik ut etter hvert som du skriver:  $x^2 + 2x = 4$ . Hvis noe "henger igjen" kan det være at et ekstra trykk på mellomromstasten gjør susen. Potenser heves, indekser senkes, det blir satt rett avstand mellom minustegn og likhetstegn osv. Brøker kan skrives med den vanlige skråstreken, og  $2/3$  vil da automatisk bli til  $\frac{2}{3}$ , mens  $(2x+1)/(5-3x^2)$  blir til  $\frac{2x+1}{5-3x^2}$ . Merk også at størrelsen er forskjellig, avhengig av om matematikken skrives i teksten, eller på egen linje. Det forrige brøkuttrykket blir slik når det skrives på en egen linje:

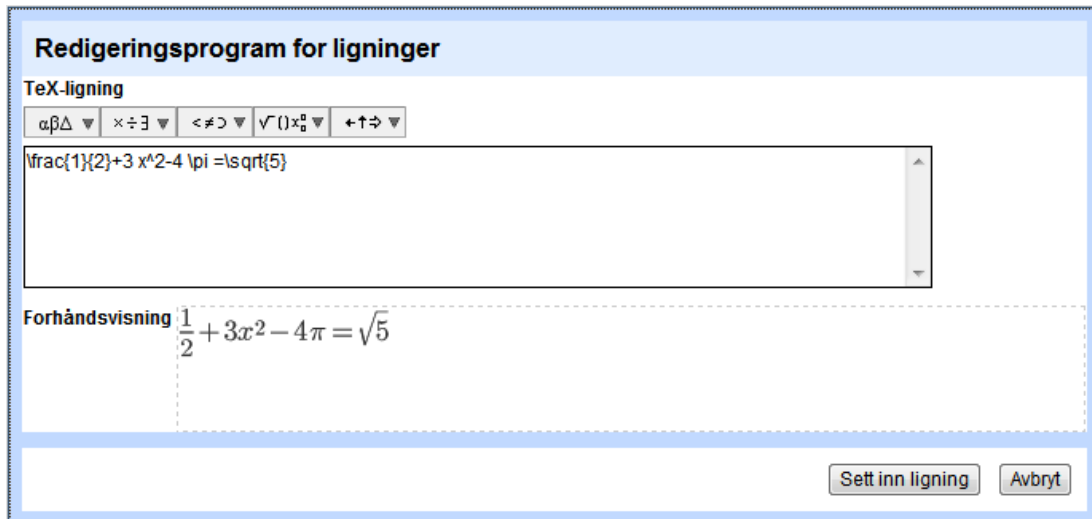
$$\frac{2x + 1}{5 - 3x^2}$$

Det er nok en god ide å skrive lengre uttrykk på en egen linje, så de blir lettere å lese. Fremdeles kan det være hendig å bruke rullegardinmenyene øverst til å sette inn symboler man ikke bruker så ofte. Noe av det som er nytt er altså at man nå kan sette inn matematikk med LaTeX-koder. For eksempel kan man skrive `\sqrt{4x^2}` for å lage uttrykket  $\sqrt{4x^2}$ . Prøv, så ser du at kodene blir gjort om til ordentlig matematikk mens du skriver. Det brukes vanlige parenteser i Word, selv om det opprinnelig ble brukt klammeparenteser i LaTeX. Her er altså `\sqrt` koden for kvadratrot. Hvis du ikke kan (eller ikke vil lære!) disse kodene, så fungerer selvsagt rullegardinmenyen like greit. Tabell 1 viser noen eksempler på bruk av LaTeX-koder i Word 2007. Det er verdt å merke seg at formeleditoren bruker en (forenklet) variant av LaTeX. Vi tror mange vil ha nytte av den kortfattede oversikten *Using Word 2007's new equation editor* (<http://tinyurl.com/word2007-formeleditor>), og anbefaler å ha denne lett tilgjengelig som en hurtigreferanse. For den mer teknisk interesserte, som vil vite "alt" om den nye formeleditoren, kan Murray Sargents utviklerblogg (<http://blogs.msdn.com/murrays/>) være verdt et besøk.

Tabell 1 Eksempler på bruk av LaTeX-koder i den nye formeleditoren for Word 2007

Uttrykk	Kode
$\sqrt{n}$	<code>\sqrt{n}</code>
$\sum_{k=0}^n k$	<code>\sum_{(k=0)^(n)} k</code>
$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x} dx$	<code>\ln x = \int_{(1)^(x)} 1/x dx</code>
$2 \cdot 3 = 6$	<code>2 \cdot 3 = 6</code>
$\vec{u} \times \vec{v}$	<code>u\vec \times v\vec</code>
$\angle \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$	<code>\angle \theta \in [0, \pi / 2]</code>
$x^2 \geq 0$	<code>x^2 \geq 0</code>
$ a + b  \leq  a  +  b $	<code> a+b  \leq  a  +  b </code>
$\pi \approx 3.14$	<code>\pi \approx 3.14</code>
$A \sim B$	<code>A \sim B</code>
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	<code>\quadratic</code>

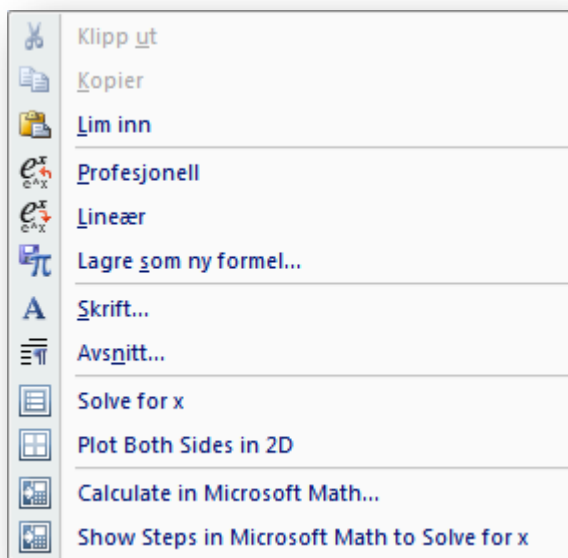
Det er nyttig å kunne litt LaTeX også i andre sammenhenger. I GeoGebra (<http://www.geogebra.org>) kan du plassere tekst med matematikk i rundt omkring på tegningen din ved å bruke LaTeX-koder. Dessuten brukes LaTeX-koder ofte for å publisere matematikk på Wikier, i blogger, i enkelte LMS og i Googles nettbaserte tekstbehandler (<http://docs.google.com>).



Figur 3 I den nettbaserte tekstbehandleren Google dokumenter benyttes LaTeX til å skrive matematikk.

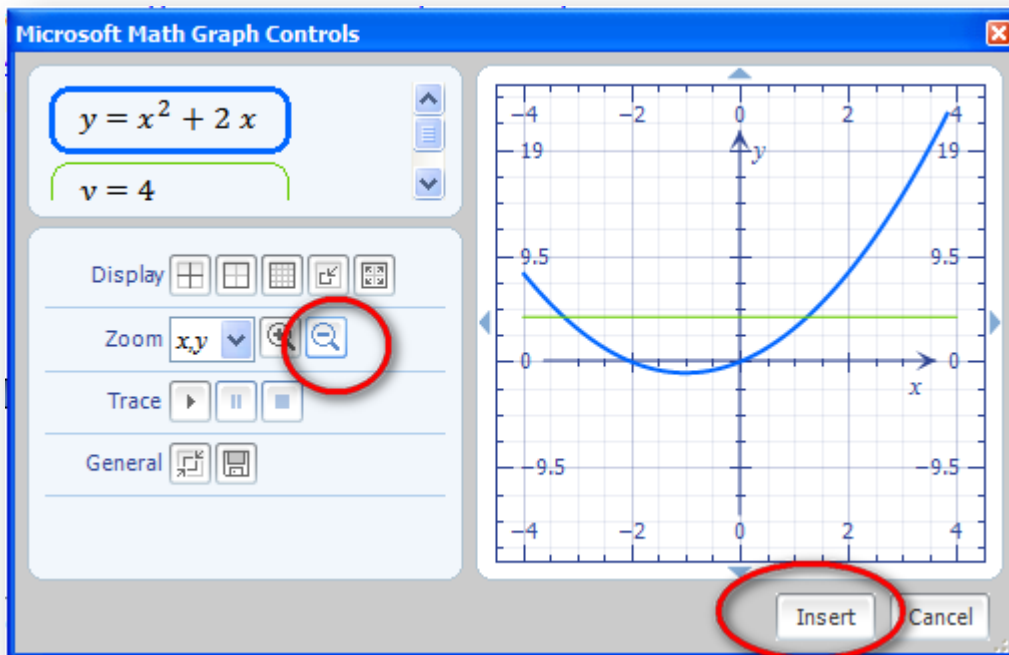
### Math add-in

Ønsker du litt mer matematisk funksjonalitet i Word er det mulighet for det. På Microsofts hjemmesider (<http://tinyurl.com/math-add-in>) kan du laste ned et gratis tillegg til Word som legger inn noen enkle graf- og algebra muligheter. Når du har installert det vil det dukke opp et ekstra valg på matematikkmenyen, nemlig bildet av en kalkulator med teksten **Math** under. Dette innebærer at et høyreklikk på ei likning, for eksempel  $x^2 + 2x = 4$ , gir deg menyen vist i Figur 3.



Figur 4 Menyene som man får ved å høyreklikke på en ligning når tillegget Math add-in er installert.

De to nederste valgene vil føre til spørsmål om å oppgradere til fullversjonen av Microsoft Math, så de tar vi ikke med her. Som du ser kan du velge å tegne begge sidene til likningen (**Plot both Sides in 2D**), for å få en dialogboks som vist i Figur 4.



Figur 5 Grafisk ligningsløsning med tillegget Math add-in.

Ved å zoome ut litt (trykke på forstørrelsesglasset med minus inni) for å få et mer passende utsnitt og så klikke på **Insert**-knappen, vil grafene tegnes i dokumentet, som vist på Figur 5.

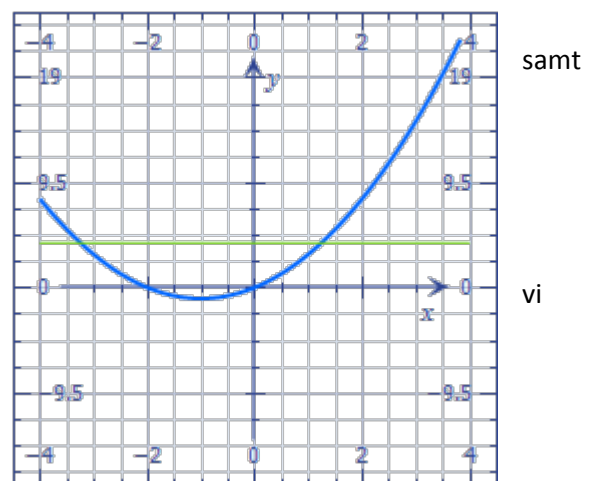
Du har også mulighet til å endre hva som skal tegnes på grafen, justere aksene og rutenettet, å følge en sporing på grafen.

En annen ting du kan gjøre ved å høyreklikke på ei likning er å finne løsningen til likningen. Før eksempel kan vi løse likningen  $x^2 + 2x = 4$  ved å høyreklikke i likninga og velge **Solve for x**. Da får stilt opp løsningene slik:

$$x = \sqrt{5} - 1$$

$$x = -\sqrt{5} - 1$$

Det er noe begrenset hva vi kan gjøre med



Figur 6

gratisversjonen av dette verktøyet, men det går altså an å kjøpe en utvidet versjon fra Microsoft. I den forenklete gratisversjonen kan vi løse ulikheter, gjøre beregninger og forenkle og faktorisere uttrykk. I tillegg kan du gjøre noen enkle derivasjoner og integrasjoner hvis du høyreklikker på uttrykk (ikke likninger). Microsoft Word kan nok ikke erstatte verken et fullblods CAS-verktøy eller grafiske verktøy som den grafiske lommeregneren eller et konstruksjonsprogram. Til det er det altfor

begrenset, i alle fall i den versjonen av Microsoft Math som fritt kan lastes ned. Men muligens kan det inngå som et egnet verktøy på lavere trinn.

### Skisser og figurer

Vi har tidligere sett at det å kunne skrive i matematikk i følge læreplanen også omfatter tegninger og skisser. Et dynamisk program som GeoGebra vil ofte være bedre egnet enn Word til å tegne grafer og geometriske figurer. Vi kan bruke GeoGebra både til å illustrere situasjonen/oppgaven vi er gitt, eller som støtte for tanken underveis i prosessen. Se for eksempel hvordan følgende oppgave kan løses med hjelp av GeoGebra:

#### Eksempel på forskjellige typer oppgaver med Word 2007

1. Bruke formeeditoren:

Skriv uttrykket

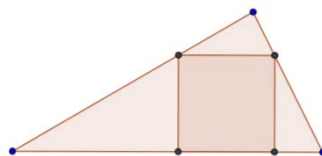
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

i formeeditoren

2. Løse enkle likninger med Word Math add-in: Skriv uttrykket  $2x - 4 = 3 - x$ . Løs likningen ved hjelp av Word Math add-in. Løs også likningen grafisk med Word Math add-in.
3. Løse ulikheter med Word Math add-in: Løs ulikheten  $x^2 - 3 > 3$ .
4. Algebra: Forenkle uttrykket  $2x - 3 + \frac{1}{2}x + 4 - \frac{5}{7}$ .

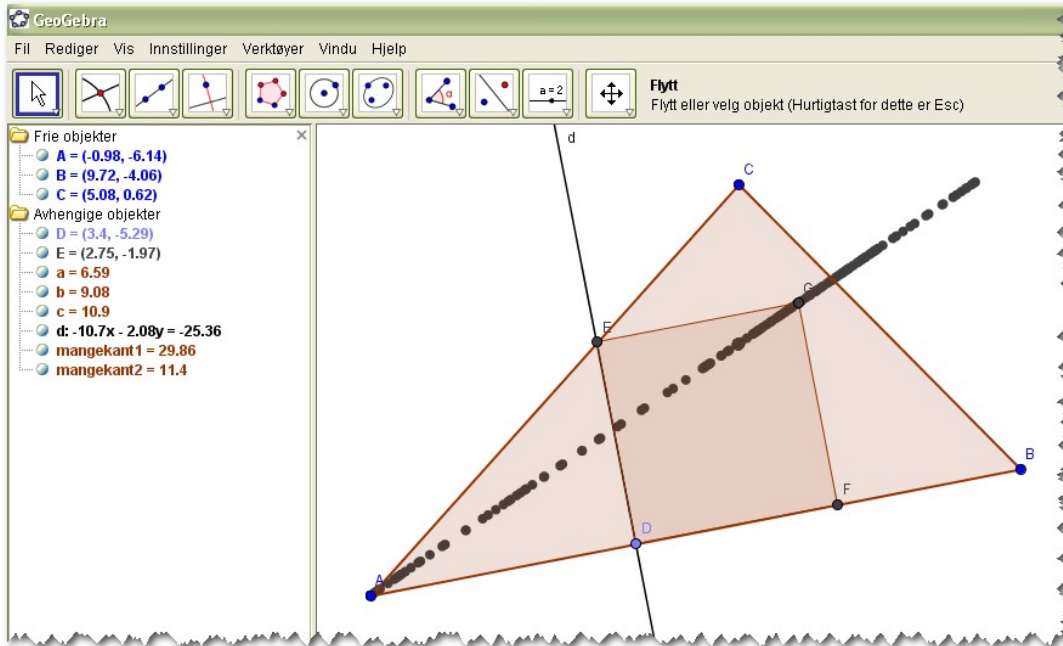
*I en gitt trekant skal du konstruere (med passer og linjal) et kvadrat som oppfyller følgende betingelser (Figur 6):*

- *Kvadratets ene side skal ligge på trekantens største side.*
- *De to siste hjørnene i kvadratet skal ligge på hver sin av de to andre sidene i trekanten.*



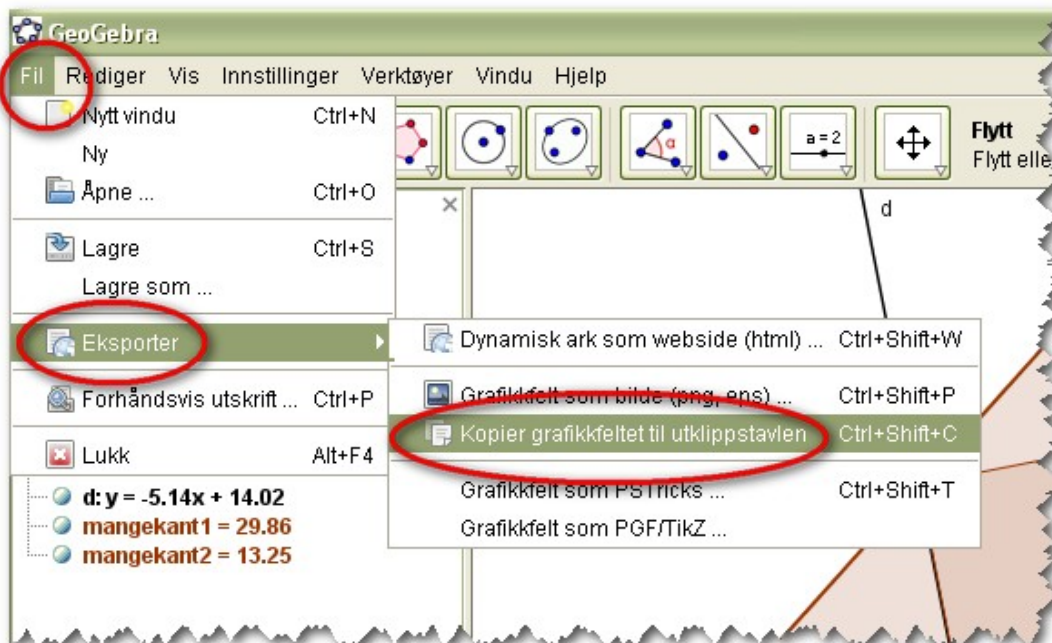
Figur 7

I Figur 7 har vi først tegnet trekanten ABC, for så å sette av punktet D på AB. Videre har vi reist normalen i D og funnet ut at den skjærer AC i E. Deretter har vi konstruert kvadratet med sidekant DE. GeoGebra kan så utnyttes til fulle ved å bevege punktet D, slik at vi kan prøve oss litt fram for å se hvor E og G skal plasseres. Vi observerer at punktet G følger noe som ser ut til å være en rett linje, og setter på sporing på G. Klarer vi å finne ut noe om den linja som framkommer vil vi være på god vei til å løse oppgaven. *Prøv selv i GeoGebra!*



Figur 8

Det kan se ut som den rette linja gjennom A og G gir det skjæringspunktet med sidekanten BC som vi er på jakt etter. Oppgaven er riktignok ikke løst ennå, men vi ser at GeoGebra kan fungere som en slags dynamisk hjelpefigur. Programmet hjelper oss på sporet av løsningen. Vi kan nå fullføre konstruksjonen, og hente den inn i Word som et bilde, eller via utklippstavlen som vist på Figur 8. Det ferdige bildet kopieres til utklippstavlen og kan limes inn i Word ved å trykke *Ctrl+V*.



Figur 9 Kopier grafikkfeltet i GeoGebra til datamaskinens utklippstavle ved å velge Fil -> Eksporter -> Kopier grafikkfeltet til utklippstavlen. Merk at hurtigtasten for å kopiere fra GeoGebra er *Ctrl+Shift+C*.



Det gjenstår å gi en matematisk begrunnelse for at vi faktisk har funnet en løsning av oppgaven, og et tekstbehandlingsprogram som Word er godt egnet til å skrive en slik begrunnelse. Men før vi kommer så langt, må vi finne en matematisk begrunnelse for at den konstruksjonen vi har kommet fram til faktisk er en løsning på oppgaven. I jakten på en slik begrunnelse vil igjen håndskrift være et godt og effektivt hjelpemiddel som støtte for tanken. *Prøv selv!*

Læreplanen knytter skriving direkte til matematiske kompetanser som problemløsning, kommunikasjon, tankegang, symbolbruk og bruk av ulike representasjoner. Skrivingen har mange funksjoner i matematikkfaget, og håndskrift er fortsatt et effektivt og godt verktøy i mange sammenhenger. Vi mener læreplanen likevel stiller krav om at elevene også må beherske skriving av matematiske tekster med likninger, skisser og figurer på datamaskin.

### Referanser og lenker

Lindstrøm, T. L. (2006). *Kalkulus*. Oslo: Universitetsforlaget.

Misfeldt, M. (2006). *Mathematical Writing*. The Danish University of Education, Copenhagen.

Niss, M., & Højgaard Jensen, T. (Eds.). (2002). *Kompetencer og matematiklæring : ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriet.