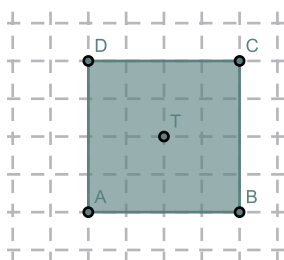


Reinert Rinvold

Tyngdepunkt og Geogebra

Dataprogrammet ”Geogebra” er et utmerket program for geometri og funksjoner. I tillegg er det gratis og finnes med norsk språk. Det kan lastes ned eller kjøres interaktivt fra www.geogebra.at.

Hvis vi tenker oss at et kvadrat er laget i papp, kan vi feste en snor i midtpunktet til kvadratet. Gjør vi dette nøyaktig, vil det balansere akkurat. Vi kaller T for tyngdepunktet til kvadratet. Alle figurer har et tyngdepunkt, men for de fleste figurer er dette mye vanskeligere å finne enn for kvadrater og rektangler. For en trekant er det ikke like lett å si hva midten er. Du ser tyngdepunktet for en trekant i figur 2.

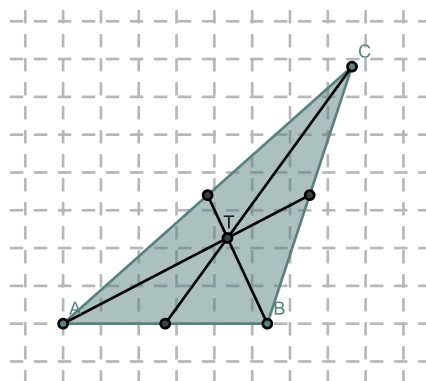


Figur 1

Tyngdepunktet for en trekant kan finnes som skjæringspunktet mellom tre linjestykker.

Disse linjestykkene forbinder et hjørne

Reinert Rinvold, NLA Lærerrhøgskolen
reinert.rinvold@lh.nla.no

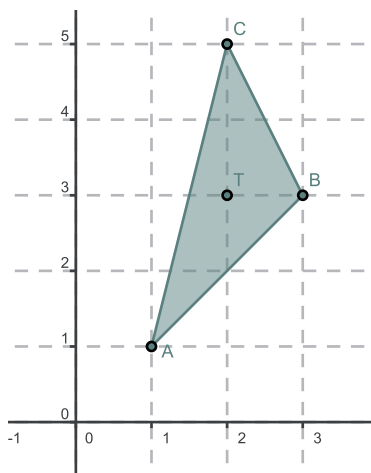


Figur 2

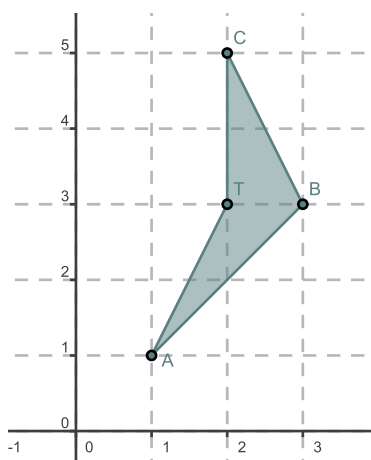
med midtpunktet til motstående side og kalles medianer (figur 2). Vi begrunner ikke her hvorfor dette virkelig blir tyngdepunktet, men det sannsynliggjøres av at en median deler trekanten i to deler med samme areal. Mer om dette i artikkelen ”Hvor er midten” side 9 i dette bladet.

En spennende egenskap ved tyngdepunktet T til en trekant er at koordinatene til T er gjennomsnittet av koordinatene hjørner. Hvis for eksempel koordinatene er $A(1, 1)$, $B(3, 3)$ og $C(2, 5)$, har vi $T(2, 3)$, fordi $(1 + 3 + 2)/3 = 2$ og $(1 + 3 + 5)/3 = 3$ (figur 3).

Tilsvarende regel gjelder for kvadrater, rektangler og parallellogrammer, men ikke for generelle firkanter. Firkanten $ABCT$ (figur 4) er et moteksempel. Gjennomsnittet av koordinatene til hjørnene må bli det samme som for



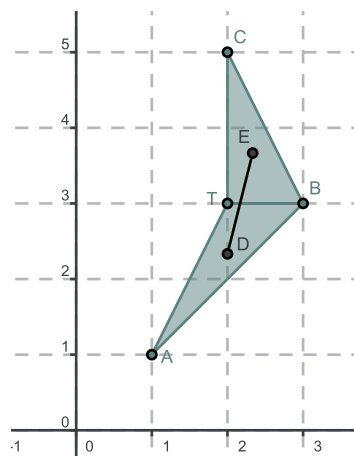
Figur 3



Figur 4

hjørnene i trekantene ABC fordi vi har føyd til et nytt punkt som er lik gjennomsnittet av trekantens hjørner. Dette er et eksempel på en generell egenskap ved gjennomsnitt. Har du en samling talldata og føyer til et nytt tall som er gjennomsnittet av talldataene du hadde, vil gjennomsnittet bli som før.

Programmet Geogebra har en kommando for å sette inn tyngdepunktet til en mangekant. Det oppgir T som tyngdepunktet til $ABCT$. Det betyr trolig at Geogebra regner ut tyngdepunktet av mangekanter generelt ved å regne ut gjennomsnittet av hjørnenes koordinater. Du kan sjekke på andre mangekanter for å se at samme regel er brukt. Men, er dette virkelig tyngdepunktet til firkanten? Lager du en fysisk modell



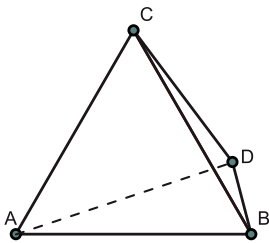
Figur 5

av firkanten i papp og henger den opp med en snor festet i T , vil du se at den ikke balanser. Det virker også intuitivt opplagt at dette ikke fungerer.

BT deler figuren i to trekanter med likt areal, så det er rimelig at tyngdepunktet ligger på linjestykket BT , men litt inne i figuren. I figur 5 er tyngdepunktene D og E til henholdsvis ABT og BCT tegnet inn. En egenskap ved tyngdepunktene er at vi kan tenke oss at all massen i en figur er plassert i tyngdepunktet. Det innebærer at tyngdepunktet til $ABCT$ ligger på linjestykket mellom D og E . Siden de to trekantene har samme areal, ligger tyngdepunktet til $ABCT$ akkurat på midtpunktet til DE . Hadde trekantene hatt forskjellig areal, ville koordinatene til firkantens tyngdepunkt vært et vektet gjennomsnitt av koordinatene til D og E .

Programmet Geogebra gjør en interessant feil, som også en elev kunne gjort. Det generaliserer feilaktig en regel for trekanter til også å gjelde mangekanter med mer enn tre kanter. Regelen har en riktig generalisering. Den har med ulike dimensjoner å gjøre. Koordinatene til midtpunktet til et linjestykke er gjennomsnittet av endepunktens koordinater. Det er en generalisering til en dimensjon. Den tredimensjonale generaliseringen gjelder tetraedre. Dette er pyramider med trekantet grunnflate.

For disse er tyngdepunktet gitt som gjennom-



snittet av hjørnenes koordinater.

Det kan diskuteres om Geogebra regner feil, men programmet regner ikke ut tyngdepunktet basert på at arealet eller massen er jevnt fordelt i figurens indre. Utrekningen til programmet er en korrekt bestemmelse til tyngdepunktet hvis all masse finnes i figurens hjørner, og det er like mye masse i hvert hjørne. Kirfel (i "Hvor er midten?") har mer om hvordan tyngdepunktet avhenger av hvor massen befinner seg.