Bjørn Smestad

Geometriaktiviteter i lys av van Hieles teorier

På 1950-tallet begynte to matematikklærere i Nederland, Pierre van Hiele og Dina van Hiele-Geldorf, å studere barns geometriforståelse. De utviklet en teori om at denne utvikler seg gjennom fem nivåer (Tabell 1).

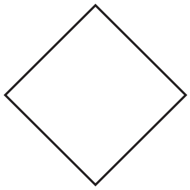
I Norge kommer vi nok først borti nivå 4 og 5 hvis vi studerer matematikk på universitetsnivået, så i denne artikkelen konsentrerer jeg meg om nivå 1, 2 og 3. Jeg vil først kort beskrive nivåene, før jeg nevner eksempler på noen fine geometriaktiviteter.

Nivå 0

Van Hiele er blitt kritisert for ikke å ha med et nivå 0 – et nivå før barna begynner å gjenkjenne figurer. På dette nivået forholder barn seg altså til figurer uten å ha bestemte navn på dem. (I fortsettelsen vil jeg bruke ordet "eleven" der det forsåvidt kunne ha stått "barnet", "studenten" eller "den voksne" – nivåene er ikke bare relevante for elever, men for oss lærere er jo elever spesielt interessante.)

Bjørn Smestad, Høgskolen i Oslo
bjorn.smestad@lu.hio.no

Nivå 1: Visualisering/gjenkjennelse



Når en elev kaller ovenstående figur "diamant" istedenfor "kvadrat" (men bruker ordet "kvadrat" når sidene er horisontale og vertikale), kan det være et tegn på at eleven er på nivå 1. Elever på nivå 1 bygger nemlig på gjenkjennelse av figuren som helhet, ikke på en vurdering av figurens egenskaper. En elev som stort sett bare har sett kvadrater som står "i standardposisjon", vil da ha vanskeligheter for å kjenne igjen kvadratet i andre posisjoner. Det er altså viktig at læreren legger til rette for rike erfaringer – for eksempel med konkreter, ikke bare figurer i bok og på tavle.

Eleven på nivå 1 kan altså ha et rikt vokabular av geometriske begreper som eleven kjenner igjen på utseendet. Dette er naturligvis ikke noen dårlig strategi i seg selv – for eksempel kjenner vi nok stort sett igjen ansikter utelukkende på helhetsinntrykk, ikke på grunnlag av lister med egenskaper – men det viser seg at matematikken etter hvert setter andre krav.

Nivå	Navn	Prosess
1	Visualisering/gjenkjennelse	figurer → klasser av figurer
2	Analyse	klasser av figurer → egenskaper til (klasser av) figurer
3	Uformell deduksjon/logisk ordning	egenskaper til figurer → relasjoner mellom egenskaper
4	Deduksjon	relasjoner mellom egenskaper → deduktive systemer av egenskaper
5	Stringens	deduktive systemer → analyse av deduktive systemer

Tabell 1

Nivå 2 Analyse

Det viktige nye på nivå 2 er at eleven er opptatt av *egenskapene* til figurene. For eksempel kan eleven se at rektangler har rette vinkler. Eleven vil imidlertid ikke (på dette nivået) kunne resonnere seg fram til at "alle rektangler har rette vinkler" medfører at "alle rektangler har parvis parallelle sider".

På dette nivået kan eleven også gi en liste over egenskaper for kvadratet, men ikke fortelle hvilke egenskaper som er *nødvendige* og hvilke som er *tilstrekkelige*. Ikke minst vil eleven på dette nivået kunne håndtere definisjoner når vi innfører nye figurer, mens en elev på nivå 1 vil nøye seg med å huske utseendet på den nye figuren.

Nivå 3 Uformell deduksjon/logisk ordning

På nivå 3 kan eleven etablere sammenhenger mellom forskjellige egenskaper til en figur og mellom forskjellige figurer. For en elev på nivå 3 vil det for eksempel være meningsfylt å slå fast at alle kvadrater også er rektangler (fordi kvadratet har alle rektanglets egenskaper). Eleven kan også følge uformelle beviser. Og eleven kan forstå at følgende definisjon av kvadrat har en overflødig opplysning: "Et kvadrat er en firkant hvor alle vinklene er rette, alle sidene er like lange og sidene er parvis parallelle."

Nivå 4 Deduksjon og nivå 5 Stringens

Nivå 4 handler om deduktive systemer, for eksempel i den stilen Euklid prøvde å bygge opp, hvor hele teorien er bygget opp fra aksiomer, definisjoner og logiske slutninger. Nivå 5 handler om analyse av deduktive systemer – for eksempel vil vi på nivå 5 kunne diskutere hva som skjer med en teori hvis man bytter ut et aksiom med et annet. Dette er lite grunnskole-relevant (i Norge i dag).

Noen viktige poenger

Før jeg går videre til å se på aktiviteter, vil jeg komme med noen viktige presiseringer.

1 Van Hiele mener at nivåene kommer i rekkefølge, og at man ikke kan hoppe over et nivå i utviklingen.
2 Hvert nivå har sitt eget språk, egne symboler og nettverk av relasjoner: van Hiele skriver: "Til tider vil halvparten av klassen snakket et språk som den andre halvparten ikke forstår. Dette er uunngåelig." (van Hiele, 1986)
3 Det som er implisitt på et nivå blir eksplisitt på neste nivå.
4 Undervisning som foregår på et nivå over elevens nivå blir gjenstand for "reduction of level" – og elevene presses inn i utenatlæring. For eksempel gir det ikke mening for en elev på nivå 1 å få vite at kvadrater også er rektangler. Skal eleven lære det

mens han er på nivå 1, vil det kun bli som en regel som må huskes.

5 Framgang fra et nivå til det neste er mer avhengig av erfaring fra undervisning enn av alder eller modning. Nivåene er altså ikke av samme type som Piagets nivåer, som i hovedsak er avhengig av elevens modenhetsnivå.

6 Overgang fra et nivå til neste består av flere faser, som van Hiele beskriver i litteraturen. Jeg går ikke inn på dette her.

Kjennskap til van Hieles nivåer gjør at jeg stiller disse to spørsmålene når jeg skal planlegge en geometriaktivitet:

- Tror jeg at aktiviteten vil egne seg for elever som er på ulike nivåer?
- Tror jeg at aktiviteten vil gi elevene erfaringer som bringer dem til nye nivåer? (Pierre van Hiele var bekymret for at lærere for ofte forenklet oppgaver slik at utfordring og motstand ble borte.)

Dersom svaret på disse spørsmålene er nei, tenker jeg videre over om jeg kan tilpasse aktiviteten så den blir bedre for flere av elevene.

Et geometrikortspill

Jeg har laget et lite kortspill som både er morsomt å spille og som kan være ganske lærerikt. Spillet består av tre typer kort: figurkort, beskrivelseskort og jokere. Hovedprinsippet er ganske enkelt: man har lov til å legge et beskrivelseskort på et figurkort dersom beskrivelsen passer på figuren. For eksempel har man lov til å legge «Har en spiss vinkel» på den likebente trekanten. Man har også lov til å legge et figurkort på et beskrivelseskort hvis beskrivelsen passer til figuren. Man har altså også lov til å legge den likebente trekanten på «Har en spiss vinkel»-kortet. Og man har lov til å legge joker på alt. Det gjelder å bli kvitt kortene sine.

Mer detaljerte spilleregler finnes sammen med mal for spillkortene på Tangentens hjemmesider www.caspar.no/tangenten/2008/smestad.html. Men husk at spillet blir bedre om læreren tilpasser det til de utfordringene elevene jobber med for tida.

Nå kan jeg stille de to spørsmålene som jeg nettopp nevnte, til dette spillet:

- Tror jeg at aktiviteten vil egne seg for elever som er på ulike nivåer?

Ja, det tror jeg. Også elever på nivå 1 vil kunne spille, siden de kjenner en del navn på geometriske figurer og siden de kan bruke jokere. Elever på nivå 2 vil ha nytte av sin interesse for figurenes egenskaper. Elever på nivå 3 vil kanskje tenke over om et kvadrat nødvendigvis er en rombe, for eksempel. Altså blir ikke spillet meningsløst for noen av elevene, selv om de er på ulike nivåer.

- Tror jeg at aktiviteten vil gi elevene erfaringer som bringer dem til nye nivåer?

Jeg mener at det blir for enkelt å si at noen elever kun bruker gjenkjenning, mens andre ser på figurenes egenskaper. I en overgangsfase kan godt en elev kjenne igjen et kvadrat ut fra utseendet, men samtidig være fullt ut i stand til å svare på om kvadratet har en rett vinkel eller om noen av sidene er like lange. Eleven kan altså knytte "selve begrepet" kvadrat til utseendet, men likevel knytte egenskaper til konkrete kvadrater. Det dette spillet gjør, for elever på nivå 1, er å «tvinge» dem til å forholde seg til egenskaper. De sitter med en konkret egenskap og skal tenke over om den passer til en konkret figur. Dette tror jeg er nyttig arbeid for å få økt oppmerksomhet om egenskapene.

I løpet av spillet vil det ofte dukke opp diskusjoner. Når en elev legger på «Er rektangel»-kortet på kvadratkortet, vil en elev på nivå 1 kunne reagere. Og forklaringen han får, vil muligens ikke gi mening for ham. Slik sett er ikke spillet noen løsning på dette problemet. Vi må fortsatt, som lærere, vurdere når en forklaring på basis av figurenes egenskaper vil kunne gi mening for eleven.

Andre diskusjoner er enklere å forholde seg til. Når parallellitet har vært tema i undervisningen og læreren har laget en utgave av spillet med mange innslag av parallellitet, dukker det opp klargjørende spørsmål elevene imellom som kan gjøre at begrepet fester seg.

For øvrig er min erfaring at spillet egner seg godt til repetisjon. Selv lærerstudenter har hatt nytte av å repetere enkelte begreper – i en morsom ramme.

Eksempler på andre aktiviteter

Jeg vil gi noen flere eksempler på andre fine geometriaktiviteter, og vurdere dem ut fra van Hiele-tenkning.

Sirkeljakt

En vanlig aktivitet er å lete etter ting i omgivelsene som har en bestemt form – for eksempel sirkulær. Dette fører ofte til en avklaring av forskjellen på sirkel og ikke-sirkel. Som jeg nevner i artikkelen «Sirkelen» [3], kan det også være en idé å diskutere *hvorfor* ting er sirkulære – hva er det med egenskapene til sirkelen som gjør den egnet som tverrsnitt av kopper (eller kumlokk), for eksempel. Slike diskusjoner øker oppmerksomheten om egenskapene, ikke bare utseendet, til geometriske figurer. Dette er erfaringer som bidrar til en bevegelse mot nivå 2.

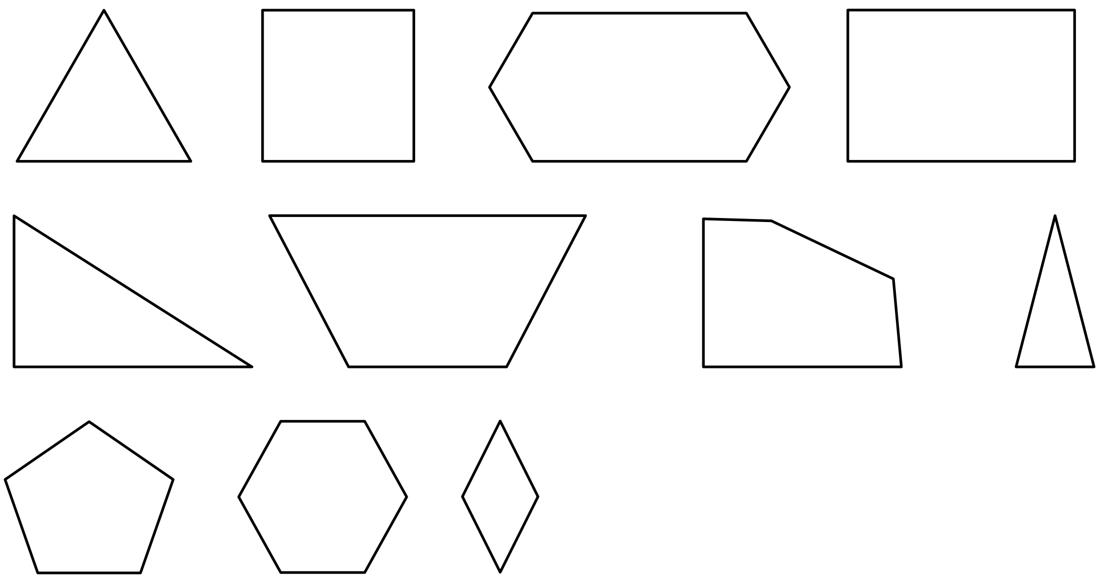
Kjenne på formene

Hvordan kjennes et kvadrat ut? I vår visuelt opptatte verden, er vi opptatt av å beskrive hvordan et kvadrat *ser ut*, men det gir en annen opplevelse å kjenne på et kvadrat (uten å se), og samtidig beskrive hva vi kjenner. De geometriske egenskapene er de samme, men beskrivelsene kan bli rikere når vi tar i bruk flere sanser. (Hvordan kjennes parallellitet ut?). Dette kan utvides til en liten lek, hvor man med bind for øynene skal finne bestemte figurer.

Hvem skal ut?

En litt avansert form for «Hvem skal ut?» er beskrevet av Van de Walle (2004): du får oppgitt noen figurer som *har* en felles egenskap, noen figurer som *ikke har* den samme egenskapen, og får så noen figurer til hvor du skal plukke ut hvilke(n) som har den samme egenskapen. Et eksempel ser vi i figur 1.

Det er viktig å presisere at det her ikke nødvendigvis finnes kun ett svar. Det kan være flere gode svar som passer. (Mitt forslag til svar følger



Figur 1

på slutten av artikkelen.)

En veldig fin differensierende aktivitet er at elevene lager slike oppgaver til hverandre. Det krever mye tankevirksomhet å lage tre-fire ulike figurer som *ikke* har en bestemt egenskap – og det er svært nyttig arbeid. Ofte bruker vi for lite tid på å se på ikke-eksempler i norsk skole

Mange lærere har forresten sagt at de setter pris på at man kan bruke den samme oppgavetypen i mange fag. Her er et eksempel:

Oslo, London, Roma, Warszawa, Manchester, Venezia, Bergen, St. Petersburg, Trondheim, Lisboa, New York, Madrid.

Egenskaper og definisjoner

Når man nærmer seg nivå 3, kan man jobbe med forskjellen på en definisjon og en liste av egenskaper. For eksempel: vi vet at kvadratet blant annet har følgende egenskaper: det har fire sider, alle vinklene er rette, alle sidene er like lange, diagonalene skjærer hverandre på midten, figuren kan deles i fire kongruente biter som er formlike med originalen … Hvor få av disse kan vi klare oss med i en definisjon? (For eksempel: det holder ikke å si at diagonalene skjærer hverandre på midten, for det gjør de i alle rektangler, ikke bare kvadratene.)

Sluttord

Jeg ser på van Hiele-teorien som en fin bakgrunn for å tenke differensiering og utvikling innen geometri. Jeg er imidlertid skeptisk til å skulle putte elevene i nivåer – men mener at det er mulig å få en del ut av van Hieles tenkning selv om man har motstand mot den mest firkantede nivåtenkningen. Og ikke minst: det finnes massevis av fine geometriaktiviteter som egner seg godt i skolehverdagen.

Løsningsforslag

Mitt forslag til svar er at det er den regulære femkanten og den regulære sekskanten som har den aktuelle egenskapen – nemlig at alle vinklene er like store.

Referanser

[1] van Hiele, Pierre (1986). *Structure and Insight: a theory of mathematics education*. Developmental Psychology Series. London: Academic Press.

[2] Kroknes, Tom-Erik og Landsem, Dennis G.: Innføring i geometri. Nedlastet 12.11.2007. www.pvv.ntnu.no/~dennisgl/semester/matematikk/oppgave_1.html

[3] Smestad, Bjørn (2006). Sirkelen. *Tangenten* 2/2006. Bergen: Caspar Forlag AS

[4] van de Walle, John A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*. Boston: Allyn and Bacon

Eksempler på spillkort

Minst en av vinklene er større enn 90 grader

Noen av sidene er parallelle