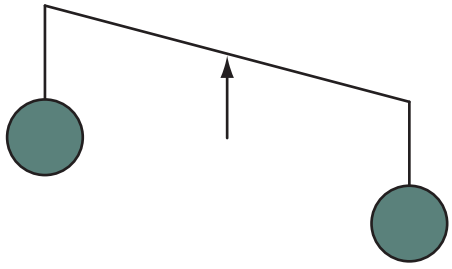
Christoph Kirfel

Hvor er midten?

Hva mener vi med midten av en figur? Her ser vi hovedsakelig på trekanter. Dersom vi tenker oss at trekantene har en viss vekt kan vi spørre etter balansepunktet, opphengspunktet eller tyngdepunktet for forskjellige typer trekanter. Vi lar oss inspirere av uroer og ser først på den enkleste typen.

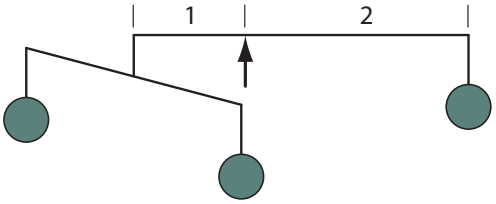
To legemer av samme vekt skal henges fra en stang. Stangen betrakter vi her som vektløs. Hvor finner vi balansepunktet når stangen skal henges opp i et punkt?

Intuisjonen forteller oss at opphengspunktet må være midt mellom vektene, i alle fall så lenge massene er like store.



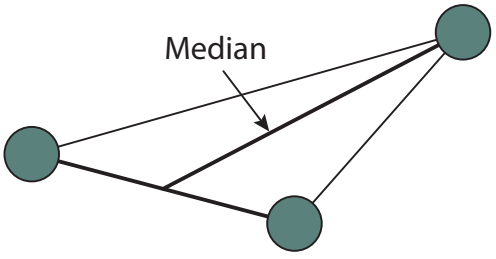
Figur 1. En enkel uro

Skal denne ”miniuroen” nå innlemmes i en større uro, der vi bruker en tredje masse (av samme størrelse), så er det naturlig at opphengspunktet er nærmere stangen med de to massene enn den enkle massen. Vektstangprinsippet sier at den nye stangen må deles i forhold 2:1 for å finne balansepunktet (samme forhold som massene). Her forutsetter vi at stengenes vekt kan neglisjeres.



Figur 2. Sammensatt uro

Betrakter vi nå denne uroen fra fugleperspektiv så oppdager vi raskt en trekant. Trekanten forandrer seg når uroen rører på seg, men det er en del forhold som er konstante.



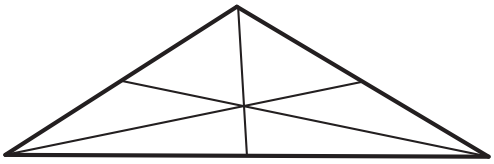
Figur 3. Uro sett fra oven

Den ene stangen representerer en *side* i tre-

Christoph Kirfel, Universitetet i Bergen
christoph.kirfel@math.uib.no

kanten mens den andre representerer en såkalt "*median*" (forbindelse mellom et trekanthjørne og midtpunktet på den motstående siden).

Vi kan altså si at balansepunktet for en slik uro må ligge på en median og balansepunktet deler medianen i forhold 2:1. Tegner vi inn de to andre medianene i trekanten så er det nå opplagt at balansepunktet må ligge på disse også. Men det betyr at medianene møtes i et punkt, nemlig balansepunktet for uroen og medianene deler hverandre i forhold 2:1.

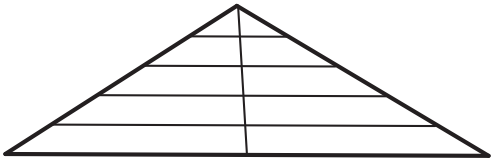


Figur 4. Medianene møtes i tyngdepunktet

Massive trekanter

I de første undersøkelsene vi gjorde var massene konsentrert i trekanthjørnene. Nå ønsker vi å se på en massiv trekant for eksempel i papp eller metall og finne opphengspunktet for den.

Mistanken er den at medianenes skjæringspunkt vil gjøre jobben også her. Til dette formål tenker vi oss trekanten delt i parallelle smale striper.

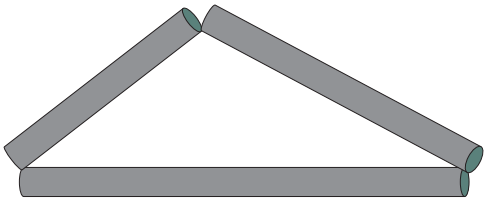


Figur 5. Oppdeling i striper

Vi tenker oss stripene veldig smale. Da vil stripene (tenkt hver for seg) balansere over en støttekant (knivsegg) som går langs en median. Det betyr at en median kan fungere som en slags støtte for trekanten. Det er opplagt at de andre medianene hver for seg også må kunne fungere som støttelinjer og at dermed tyngdepunktet er å finne der de tre medianene møtes. Delingsforholdet er 2:1 for hver av dem som vi viste ovenfor.

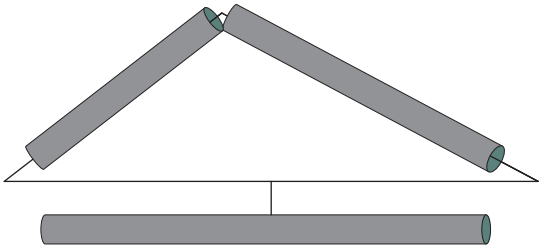
Til slutt vil vi gjerne ta en titt på trekanter, der massen er fordelt langs med kantene. Vi forestiller oss tre massive jernrør eller stenger av et annet materiale. Mellomrommet er fylt med en slags vektløs papp. Hvor finner vi nå opphengspunktet for en slik konstruksjon?

Ideen er å gjennomføre følgende tankeeksperiment: I stedet for en uro med tre jernstenger sveist sammen, ser vi på følgende uro.



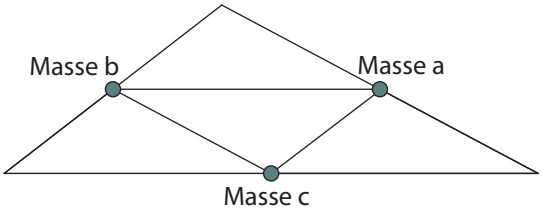
Figur 6. Trekant av massive jernrør

Vi fester jernrørene i en tråd som henges midt på den tilhørende siden i den vekt løse trekanten. I tegningen er dette gjennomført kun for en side.



Figur 7. En jernstang erstattes

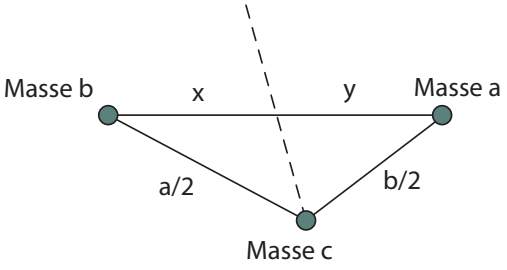
Det er opplagt at opphengspunktet for hele uroen er uforandret. Dvs. at vi egentlig kan tenke oss massene konsentrert i sidemidtpunktene og vår oppgave er å finne balansepunktet for sidemidtpunkttrekanten. Men her er det altså forskjellige masser i de enkelte sidemidtpunktene.



Figur 8. Alle jernstengene erstattes.

Vi arbeider videre med sidemidtpunkttrekanten og tenker oss at i hvert hjørne av denne er det forskjellige masser (*a*, *b* og *c*). Husk at sidemidtpunkttrekanten er formlik med den opprinnelige trekanten. (Hvorfor?)

Vi gjennomfører et nytt tankeeksperiment. I stedet for balansepunktet leter vi i første omgang etter en støttelinje gjennom et av hjørnene (stiplet linje gjennom massen *c*), som er slik at trekanten balanserer over denne støttelinjen.

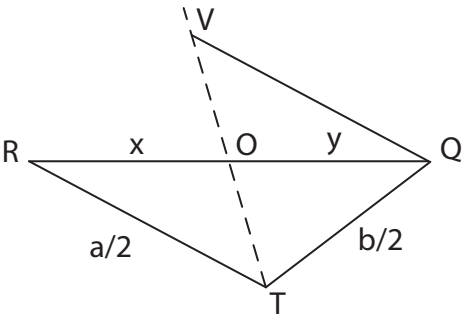


Figur 9

Vi må sørge for at støttekanten deler trekantsiden (mellom massene *a* og *b*) slik at massene på hver side er avbalansert. Massen *c* som hviler på støttekanten behøver vi ikke ta hensyn til.

Vektstangprinsippet forteller oss at vi må ha $xb = ya$, eller $x/y = a/b$ for å oppnå balanse. Vi kan si at støttelinjen deler trekantsiden i samme forhold som de tilstøtende sidene.

Vi skal nå undersøke hvilken rolle denne støttelinjen spiller. Vi merker av punktet *V* på støttelinjen som ligger like langt fra *Q* som punktet *T*. Skjæringspunktet mellom støttelinjen og *QR* kaller vi *O*.



Figur 10. Formlike trekanter

Vi skal nå vise at trekantene *TOR* og *OQV* er formlike. For det første har de en toppvinkelen ved *O*. For det andre har to par av sidene samme forhold, nemlig

$$\frac{RO}{OQ} = \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{a/2}{b/2}$$

Siden nå trekantene er formlike er vinkel *RTO* lik vinkel *OVQ*. I tillegg er trekanten *TVQ* likebeinet og viklene OVQ og VTQ er like. Dermed er altså vinklene ved T på hver sin side av støttelinjen de samme. Støttelinjen er altså halveringslinjen (vinkelhalvering) og balansepunktet ligger på halveringslinjen.

På samme måte kan en også vise at balansepunktet ligger på de andre halveringslinjene i trekanten (sidemidtpunkttrekanten). For å finne balansepunktet må vi derfor finne halveringslinjenes skjæringspunkt. Det er som kjent senteret for den innskrevne sirkelen i trekanten (sidemidtpunkttrekanten). Dette punktet heter også innsenteret.

Vi konkluderer med å oppsummere resultatene:

- Medianenes skjæringspunkt er tyngdepunkt i trekanter som enter er massive eller der massen er konsentrert i hjørnene og fordelt likt.
- En trekantet uro der massene ligger langs med kantene har sitt balansepunkt i innsenteret for sidemidtpunkttrekanten.