

Anne-Mari Jensen

Utforsking av funksjonsuttrykk og de tilhørende grafene ved hjelp av GeoGebra

Innledning

I ungdomsskolen kommer funksjoner inn som et av hovedområdene i læreplanen i matematikk. Arbeidet med dette hovedområdet fortsetter i videregående skole. Jeg har prøvd å finne arbeidsformer hvor elevene selv må forske og undersøke. Tenk om vi kunne legge til rette så elevene våre fikk oppleve noe av spenningen og gleden ved å oppdage systemer og sammenhenger selv!

Undersøkelsesoppgaver

Gjennom oppgaver der elevene selv må undersøke og lete etter løsninger utfordres de til å tenke kreativt. De må gjette, begrunne sine gjetninger og lete etter regler og generaliseringer gjennom å analysere og systematisere spesielle tilfeller. Det er en trening i matematisk tenkning.

Gjennom oppgaver som skal løses i fellesskap, får de øve på å uttrykke seg muntlig i faget. De må artikulere sine tanker, kanskje argumentere og presisere. Mange ganger kan samtalen være til hjelp for forståelsen av et problem og løsningen av det. Og det er motiverende å oppdage sammenhenger og løsninger uten at læreren sier

hvordan alt er.

Ved å la elevene skrive ned regler eller løsninger med egne ord, får de trening i å uttrykke seg presist. Og ved å analysere og diskutere det de har skrevet i fellesskap øves de i logisk resonnering og kritisk tenkning. I tillegg vil de se at det kan være svært mye å lære av en feil.

Undervisningsoppleggene som er skissert nedenfor kan passe til Vg1 på videregående skole, men like godt i de øverste klassene på ungdomsskolen. De fleste oppgavene nedenfor egner seg for samarbeid i par.

Graftegneprogram

Dette undervisningsopplegget krever at elevene tegner mange grafer og studerer sammenhengen mellom funksjonsuttrykkene og grafene. Det fungerte greit når elevene hadde lommeregner med grafisk display. Men de siste par årene har elevene hatt bærbare Pc-er og vi har brukt programmet GeoGebra. Andre graftegneprogram kan også brukes. Men jeg har gode erfaringer med GeoGebra og kan anbefale det. Det er gratis og kan lastes ned på datamaskinene, se: GeoGebra.org.

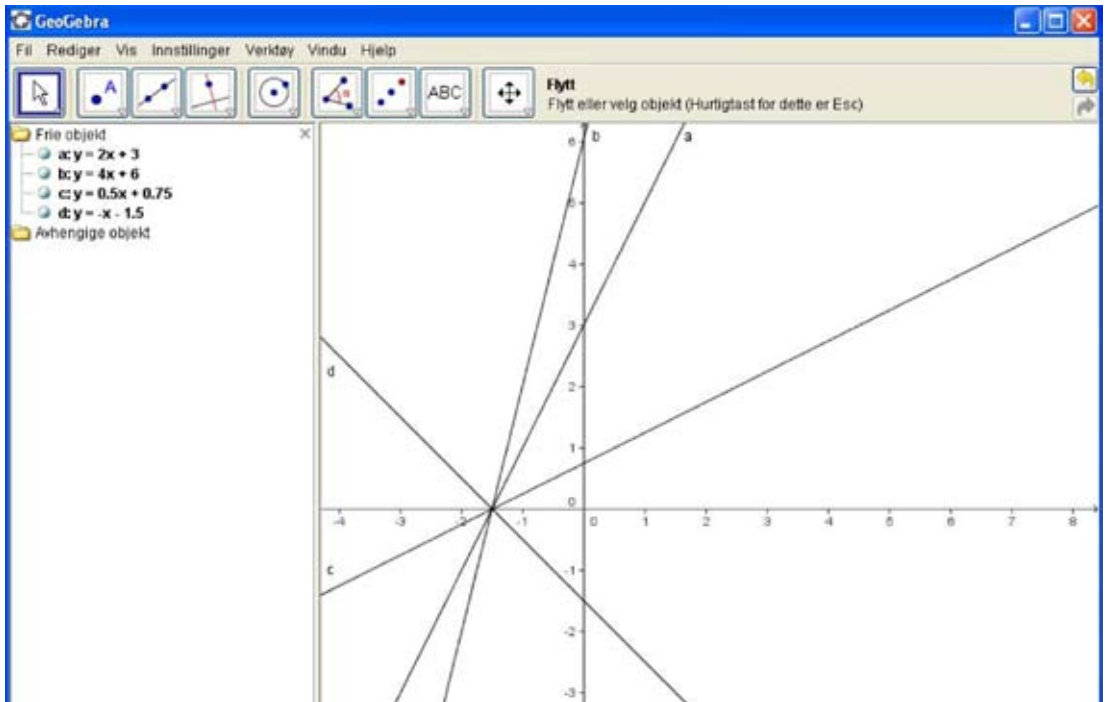
Lineære funksjoner

I første klasse på videregående skole er de fleste elevene fortrolig med at en lineær funksjon har formen $y = ax + b$, og at man kan illustrere den med en lineær graf i et koordinatsystem.

Anne Marise Jensen

Meløy videregående skole avd. Ørnes

Anne-Mari.Jensen.Meloy@nfk.no



Figur 1: Rette linjer som går gjennom samme punkt på x -aksen. Funksjonsuttrykkene kommer fram i algebravinduet til venstre

På dette nivået bruker vi begrepet funksjon. I første omgang holder det å si at en funksjon er en ligning der det fins en ukjent som kan variere fritt, som regel x , og en annen variabel y som er avhengig av verdien til x .

Vi starter med at elevene kommer med forslag på noen lineære funksjoner som de kan tegne i GeoGebra (eller det tegneprogrammet de bruker).

Jeg velger ut et av forslagene, f. eks. $y = 2x + 3$ og ber elevene skrive denne funksjonen inn i inntastingsfeltet nederst i bildet. Da tegnes grafen til denne funksjonen. Så ber jeg dem skrive inn mange ulike funksjonsuttrykk slik at linjene tegnes i samme koordinatsystem. De skal beholde alle linjene som går gjennom samme punkt på y -aksen. Andre linjer skal de slette. Når alle har funnet en del linjer som går gjennom samme punkt på y -aksen, ber jeg dem se på funksjonsuttrykkene som står i algebravinduet til venstre. Hva er felles? Oppgaven blir å formulere en regel med egne ord: Hva kreves

av funksjonene for at grafene skal gå gjennom samme punkt på y -aksen? Hva er likt i alle funksjonsuttrykkene? Og hva kan variere?

Elevene samarbeider, og alle parene må så lese opp sin regel. I fellesskap må hver regel vurderes. Er den riktig? Kan den misforstås? Må noe endres for at den skal bli helt klar? – Til slutt har alle fått sin egen regel. Her passer det å innføre, evt. å repetere, begrepet *konstantledd*.

Neste oppgave starter med at elevene på nytt tegner den rette linja til $y = 2x + 3$ i et blankt koordinatsystem. På samme måte skal de nå "samle på" linjer som er parallelle med den første, finne systemet og formulere en regel. Og alle reglene må leses høyt og vurderes. Og så innfører vi, eller repeterer, begrepet *stignings-tall*.

En gang hadde klassen min avsluttet denne jobben. Jeg syntes vi hadde fått med det viktigste om lineære funksjoner og grafer, da en av elevene sa: "Nå har du vel tenkt å be oss finne mange rette linjer som går gjennom samme

punkt på x -aksen?” En flott utfordring som vi måtte gripe!

Dette er vanskeligere. Er det nok å bare variere enten stigningstall eller konstantledd? Det er flott om elevene kan være med på å oppdage at denne regelen må ha med begge konstantene å gjøre. Se figur 1.

Linja $y = 2x + 3$ går gjennom punktet $(-3/2, 0)$ på x -aksen. Flere linjer som går gjennom samme punkt på x -aksen, er for eksempel $y = 4x + 6$, $y = 0,5x + 0,75$ og $y = -x - 3/2$. Vi kan hjelpe elevene til å finne en sammenheng ved å lage en tabell hvor de kan sette inn verdier for a og b :

a	2	4	0,5	-1
b	3	6	0,75	-3/2

I alle tilfellene blir $b/a = 3/2$. Så alle funksjoner som oppfyller kravet $b/a = 3/2$ vil ha lineære grafer som går gjennom punktet $(-3/2, 0)$.

Gjelder denne regelen bare for linja til funksjonen $y = 2x + 3$? Hva om vi starter med linja til $y = -3x + 1$ eller med $y = 2x - 4$? Vil den samme regelen gjelde da?

Generelle løsninger

Etter hvert er det tid for å snakke om *generelle løsninger*. Elevene, i alle fall i Vg1T, bør få øving i å prøve å finne generelle regler.

Skjæringspunktet mellom grafen og y -aksen

Hvorfor ville alle rette linjer skjære y -aksen i konstantleddet? Jo, fordi dette er punktet der $x = 0$. Hvis vi setter $x = 0$ inn i funksjonsuttrykket til linja, får vi $y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$. Da har vi vist at linja til $y = 2x + 3$ må skjære y -aksen i $y = 3$. På samme måte kan vi vise at det alltid blir slik at linja til $y = ax + b$ vil skjære y -aksen i $y = b$.

Skjæringspunktet mellom grafen og x -aksen

I punktet der linja $y = 2x + 3$ skjærer x -aksen, er $y = 0$. Ligningen blir da $0 = 2x + 3$. Vi får $2x = -3$ og $x = -3/2$. Da har vi vist at linja må skjære x -aksen i $x = -3/2$. Og vi så ovenfor at

lineære funksjoner som er slik at konstantledd/stigningstall $= 3/2$ vil gi linjer som går gjennom punktet $-3/2$ på x -aksen.

Og generelt for linja $y = ax + b$: Vi setter $y = 0$ og får $0 = ax + b$. Vi får $ax = -b$ og $x = -b/a$. Så alle rette linjer $y = ax + b$ går gjennom punktet $x = -b/a$ på x -aksen. Og alle lineære funksjoner som er slik at b/a blir lik det samme tallet, vil ha grafer som går gjennom samme punkt på x -aksen.

Illustrasjon med GeoGebra

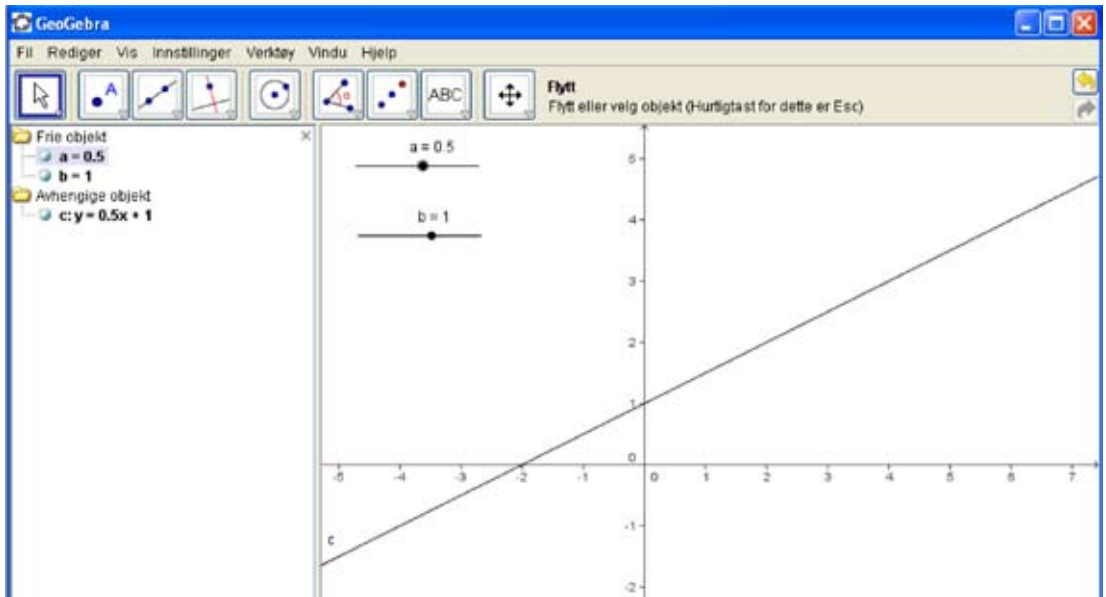
Først når vi har kommet så langt, viser jeg elevene hvordan de lett kan få bekreftet sine regler ved hjelp av GeoGebra.

Vi kan starte med å gi a og b hver sin tallverdi, f. eks. skrive inn $a = 1$ og $b = 1$. Videre kan vi skrive inn $y = a^*x + b$, da tegnes linja $y = x + 1$. Høyreklikk på a og b i algebravinduet og velg ”vis objekt”. Da kommer det fram glidere, - små tallinjer for de to verdiene. Punktet på glideren kan flyttes langs glidelinjene og på denne måten kan vi variere verdiene til hhv. a og b . Samtidig kommer de tilhørende funksjonsuttrykkene for linja fram i algebravinduet. (Se figur 2.) Vi kan nå på kort tid teste ut reglene på mange ulike funksjoner og linjer. Jeg vil understreke at jeg ikke ønsker å starte med disse animasjonene, men heller bruke dem til slutt for å kontrollere og bekrefte resultatene vi har fått.

Det kan være spennende å arbeide videre med lineære grafer. Én oppgave kan være å tegne fire rette linjer slik at de dannes et kvadrat mellom dem. Videre kan det være en oppgave å finne ut hva som skal til for at to linjer skal stå vinkelrett på hverandre, og prøve å finne og formulere en regel.

Andregradsfunksjoner

For å undersøke andregradsfunksjoner og deres grafer bruker vi samme metodikk som ovenfor. Starte med en gitt funksjon, og la en og en parameter variere mens de andre holdes fast. Prøve med ulike verdier av de parametrene som holdes fast. Undersøke nøye og formulere regler med



Figur 2: Ved hjelp av glidere kan vi se hvordan variasjon i verdiene til a og b påvirker grafen.

egne ord. Lese reglene høyt, diskutere og vurdere.

Når vi begynner å arbeide med funksjoner som gir krumme grafer, er det tid for å presisere og utdype funksjonsbegrepet: Det kreves at hver verdi av x gir nøyaktig én funksjonsverdi (én verdi av y eller av $f(x)$).

Andregradsfunksjonen er på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$. Vi kan for eksempel begynne med funksjonen $f(x) = x^2 + x + 1$. I Geogebra kan vi først skrive inn $a = 1$, $b = 1$ og $c = 1$, og så $f(x) = ax^2 + bx + c$. Det enkleste er å finne ut hva som forandrer seg og hva som ikke forandrer seg når c varierer. Hvorfor kan vi kalle c konstantledd?

I $f(x) = x^2 + x + 1$ er $a = 1$, selv om ett-tallet er ”usynlig”. Hva skjer om vi lar a variere, hva forandrer seg, og hva forandrer seg ikke på grafen? Hva skjer når a øker og når a minker, når a er positiv og når a er negativ? Og hva når $a = 0$? Hvorfor blir det slik? – Hvis elevene har lært å derivere, er det et godt tips å se på hvordan den deriverte forandrer seg når vi lar a variere i funksjonen $f(x) = ax^2 + bx + c$.

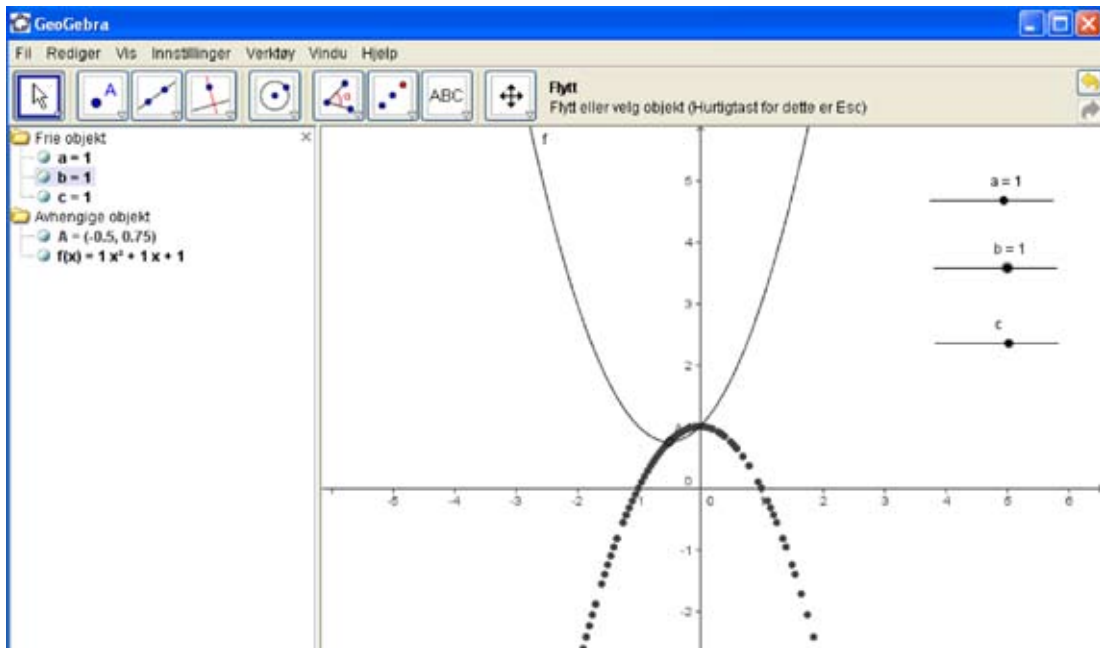
Og når vi studerer hva ulike verdier av b gjør med grafen, har vi samme spørsmål: Hva

forandrer seg, og hva forandrer seg ikke når b varierer? Hvordan forandrer grafen seg når vi lar b øke og når vi lar b minke? I GeoGebra kan vi merke av topp- eller bunnpunktet ved å skrive Extremum[f] i inntastingsfeltet nederst (i den norske versjonen av GeoGebra skriver du Ekstremalpunkt[f]). Så kan vi høyreklikke på punktet, slå på sporing og la verdien av b variere. Det vil da tegnes en kurve som elevene lett kjenner igjen. (Se figur 3.) Hva slags graf tegnes? Gjør det samme med utgangspunkt i funksjoner med andre a -verdier, - hvordan vil a -verdien påvirke formen på kurven som spores?

Andre undersøkelsesoppgaver

Man kan bruke tilsvarende arbeidsmåte og la elevene studere polynomfunksjoner av ulike grader og lete etter sammenheng mellom funksjonenes grad og følgende egenskaper: Største og minste antall nullpunkter, størst mulig antall ekstremalpunkter, og begrenset eller ubegrenset verdimengde.

Min erfaring er at når en slik arbeidsform har vært brukt flere ganger, vil elevene selv begynne å undersøke nye funksjoner på lignende måte. Det er nyttig når vi kommer til andre typer



Figur 3: Vi kan studere hvordan bunnpunktene til denne parabelen flytter seg når vi varierer verdien av b .

funksjoner – som eksponentialfunksjoner, logaritmefunksjoner og trigonometriske funksjoner.

Matematisk modellering

Læreplanene presiserer at vi skal arbeide med matematisk modellering. Man skal for eksempel finne en funksjon som passer godt til noen data som er innhentet. Om dataene plottes inn som punkter i koordinatsystemet, kan det være enklere å se hvilken type graf som kan passe best. Da er det nyttig å være fortrolig med funksjonene og hva vi kan gjøre med funksjonsuttrykkene for å få dem til å passe best mulig til punktene.

Er det verdt tidsbruken?

Å jobbe på denne måten tar tid. Hensikten med å bruke utforskende arbeidsmetoder er å skape god forståelse. Det blir dessverre ikke alltid tid til å følge opp med så mange regneøvinger som det kunne ha blitt om vi hadde fulgt lærebokas opplegg. Jeg mener likevel at det er vel anvendt

tid. Jeg har latt elevene i mange klasser arbeide på denne måten, og utforskende oppgaver engasjerer de fleste. Jeg tror mange opplever den gode følelsen av å oppdage noe nytt og av å forstå.

I løpet av arbeidet kommer ofte misforståelser for en dag. Skal forståelsen øke, må vi få misforståelsene opp til overflaten og granske dem nøye: Hvordan var tanken bak misforståelsen? Hvorfor er den feil? Hvordan skal man forstå det aktuelle emnet?

Hvis vi prøver å la elevene forske og finne ut systemer og sammenhenger selv, må vi også være åpne for innspill som de kommer med underveis. Forløpet i et undervisningsopplegg kan variere fra gruppe til gruppe, og det kan dukke opp problemstillinger som går utenfor det man egentlig hadde tenkt å ta opp der og da. Men det at elevene selv stiller spørsmål og formulerer problemer, er et svært godt utgangspunkt for læring. Utnytt slike øyeblikk! Det er ikke sikkert at motivasjonen for å forstå et problem er like stor når det dukker opp i læreboka på et annet tidspunkt.