

Per Hag og Tom Lindstrøm

Algebra og geometri — samspillet som ble borte (del 2)

I den første artikkelen i denne serien så vi to klassiske eksempler på hvordan geometriske resonnementer kan forenkle og ”forklare” algebraiske resultater. I denne artikkelen skal vi se på et eksempel som er langt mindre klassisk, men som til gjengjeld er fra vårt eget dagligliv.

Spørsmålet er hvor høyt oppe på tribunen det lønner seg å sitte når man skal se en fotballkamp.

Dersom vi sitter x meter over bakken som vist på figuren, vil vinkelen $v(x)$ være gitt ved

$$v(x) = \arctan\left(\frac{60}{x} + \sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{10}{x} + \sqrt{3}\right)$$

For å komme frem til denne formelen, observerer vi først at $|AD| = |AC| + |CD| = 60 + x\sqrt{3}$ og $|BD| = |BC| + |CD| = 10 + x\sqrt{3}$ siden trekanten CPD er en 30–60–90–trekant. Videre ser vi av figuren at

$$v(x) = \angle APD - \angle BPD$$

$$\tan(\angle APD) = \frac{60 + CD}{x} = \frac{60 + x\sqrt{3}}{x} = \frac{60}{x} + \sqrt{3}$$

$$\tan(\angle BPD) = \frac{10 + CD}{x} = \frac{10 + x\sqrt{3}}{x} = \frac{10}{x} + \sqrt{3}$$

som gir

$$v(x) = \arctan\left(\frac{60}{x} + \sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{10}{x} + \sqrt{3}\right)$$

$$v'(x) = -\frac{60}{\left(\left(\frac{60}{x} + \sqrt{3}\right)^2 + 1\right)x^2} + \frac{10}{\left(\left(\frac{10}{x} + \sqrt{3}\right)^2 + 1\right)x^2}$$

For å finne den maksimale vinkelen (som vi antar gir den beste synsopplevelsen) må vi finne ut når uttrykket for $v'(x)$ er lik null. Setter vi de

Per Hag

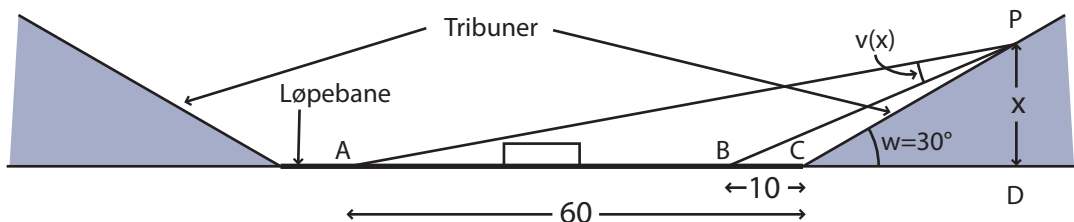
NTNU

perhag@math.ntnu.no

Tom Lindstrøm

UiO

t.l.lindstrom@cma.uio.no



to leddene lik hverandre og forenkler, får vi

$$6x^2 + 30x + 150 = x^2 + 30x + 900$$

som kan forenkles videre til

$$5x^2 = 750, x = \sqrt{150}$$

(vi kan bare bruke den positive roten). Det er nå lett å innse at denne x -verdien gir et absolutt maksimum, dvs. størst mulig synsvinkel til selve banen. Legg også merke til at dersom man måler avstanden CP oppover langs benkeradene, skal man altså gå lengden

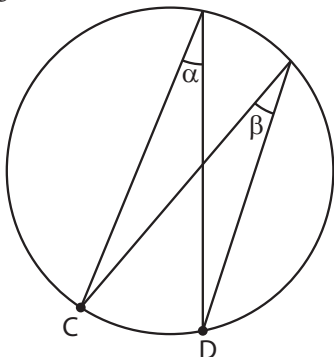
$$\frac{\sqrt{150}}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{150} = \sqrt{600} = \sqrt{60 \cdot 10}$$

for å se best mulig.

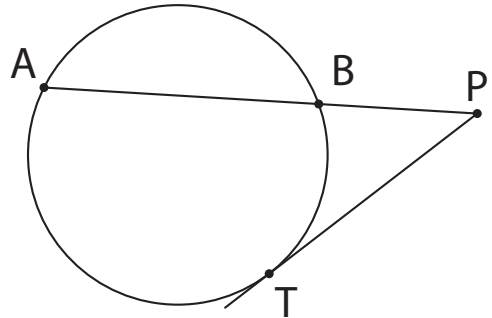
Det viser seg at det siste resultatet er helt generelt. Erstatte vi avstandene 10 og 60 på figuren med generelle størrelser a og b , og 30° -vinkelen med en generell (spiss) vinkel w , skal vi alltid gå et stykke \sqrt{ab} oppover benkeradene for å få størst mulig vinkel. Med andre ord: Vil du vite hvor du skal sitte på tribunen, måler du avstanden fra tribunen til de to sidelinjene, ganger sammen avstandene og tar kvadratrotten! Hvordan er det mulig at et så komplisert regnestykke alltid har et så enkelt svar?

Enkel geometrisk løsning

Vi trenger noen enkle geometriske resultater som nå er tilbake igjen i videregående skole etter mange års fravær:



- (i) I en sirkel er periferivinkler som spenner over samme bue like store (på figuren er altså $\alpha = \beta$). Lager vi en større sirkel som går gjennom de samme punktene C og D , blir periferivinkelen mindre.



- (ii) Punktets potens med hensyn på en sirkel: Hvis PT er en tangent til en sirkel og A og B er skjæringspunktene mellom sirkelen og en linje gjennom P , så er $PA \cdot PB = (PT)^2$.

Vender vi nå tilbake til vårt tribuneproblem og tegner en sirkel som går gjennom punktene A og B (på den første figuren) og *tangerer* tribunen i P , er det greit å vise at periferivinkelen til denne sirkelen med toppunkt i P er den maksimale vinkelen vi søker. Dette skyldes at dersom vi velger et annet punkt Q på tribunen og trekker sirkelen gjennom A , B og C , så vil sirkelen bli større og dermed periferivinkelen mindre. Bruker vi nå setningen om punktets potens på punktet C og den tangerende sirkelen (se figuren neste side), får vi

$$CP = \sqrt{CA \cdot CB} = \sqrt{60 \cdot 10}$$

Noen avsluttende ord

Den geometriske løsningen gir oss en annen innsikt i problemstillingen — vi føler nå at vi skjønner *hvorfor* $\sqrt{60 \cdot 10}$ er den rette distansen å gå oppover tribunen. På den annen side må vi nok innrømme at den geometriske løsningen har et ganske stort element av flaks i seg – mens

derivasjonsteknikker alltid gir oss en ligning vi kan regne på, er det ikke alle geometriske optimeringsproblemer som har en elegant geometrisk løsning! Vi er da heller ikke ute etter å fremheve den ene metoden fremfor den andre;

det vi ønsker å understreke er at samspillet mellom geometri og algebra er berikende i seg selv, og at det å løse et problem på to måter gir mer innsikt enn det å bare finne én løsning.

