



Wilbert Geijs

# Matematikkdag i Nederland

Lek med buelenker

## Innledning

Matematikkdagen i Nederland er et motstykke til matematikkolympiaden. Den er beregnet for elever mellom 16 og 17 år. Den er landsomfattende og blir organisert av Freudenthal Instituttet. Omtrent 140 skoler deltar. Det dreier seg om omlag 5000 elever fordelt på 1400 lag av tre eller fire elever. Elevene skal løse oppgavene i gruppe og formulere en besvarelse. Ved dagens slutt skal alt være ferdig.

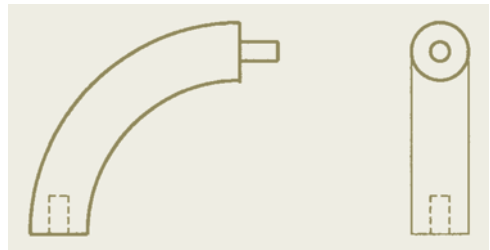
Selv om matematikkdagen egentlig er en tevling, lar mange skoler konkurranseelementet bare ligge. Noen steder blir besvarelsene vurdert. De teller med i sluttvurderingen som en "Praktisk oppgave". Under hele prosessen spiller samarbeidet mellom elevene en stor rolle.

## Bukten og begge endene

Overskriften for oppgaven i 2003 var "Matematikken har bukten og begge endene". Elevene skal undersøke de matematiske mulighetene som ligger i et leketøy som kalles for *Tangle* eller buelenker (på nederlandsk elleboog (albue)),

**Wilbert Geijs** er utdannet verktøyingeniør. Han utdanner seg til matematikklærer ved TU-Delft, Nederland  
[b.g.geijs@kabelfoon.net](mailto:b.g.geijs@kabelfoon.net)

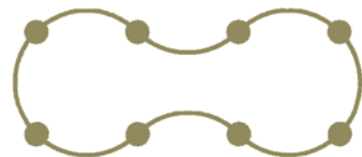
Artikkelen oversatt og tilrettelagt av Christoph Kirfel



Figur 1

se figur 1. En tangle (kommer fra USA) er 1,5 tomme lang. Den har form av en kvartsirkel. Med et klikk kan en kople sammen elementene. En lukket figur av like buelenker (uten start og sluttpunkt) kalles en krets. Kretser kan en lage i flaten men også i rommet.

For å holde matematikken på et enkelt nivå avtaler man at tykkelsen av buelenkene skal settes lik null og radien lik 1. En plan krets med åtte elementer kan en se i figur 2.



Figur 2



I møtepunktene er endepunktene til kvartsirkelene satt sammen og der har de også en felles tangent.

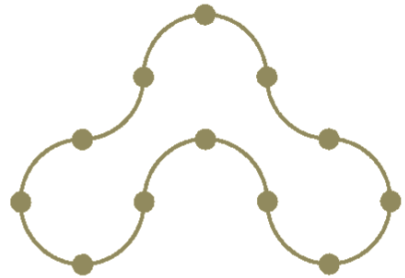
Alle lagene får et sett med 18 buelinker. Dette settet er ment til å utføre faktiske konstruksjoner slik at det blir lettere å forestille seg og å resonnerer omkring kretser i det generelle (altså også kretser med mer enn 18 elementer).

#### Hvilke plane $n$ -kretser er mulige?

Den første oppgaven er muligens den enkleste, men også den mest omfangsrike. I denne oppgaven skal en kun se etter  $n$ -kretser i planet. Den enkleste er selvsagt en 4-krets, en sirkel. Så skal en undersøke hvilke plane kretser som er mulige for  $n = 8$ ,  $n = 12$  og  $n = 16$ . For å kunne håndtere det siste tilfelle må elevene utvikle en funksjonell måte å beskrive kretsene og en systematisk fremgangsmåte for å lete opp alle muligheter. Etterpå blir elevene bedt å forklare at en plan  $n$ -krets bare er mulig når  $n$  ligger i firegangen.

Konstruksjonen av en 8-krets byr på ingen problemer (figur 2). Her er det bare en mulighet. Ved en krets med 12 elementer møter elevene de første problemene. Ved å prøve seg frem finner de til slutt alle de tre mulighetene. Noen elever starter allerede nå å lage notater og tegninger til innleveringen. Det tar lang tid å føre inn løsningene. Nå er de i gang og den vanskelige delen kan begynne. Hvordan beskriver man en krets på papir? Mange lag benytter seg av ord som "topp" og "dal". For at en krets skal være lukket skal der ikke være et start- eller slutt-punkt. Valget av start- eller slutt-punkt i beskrivelsen blir ikke sett på som vesentlig. Andre lag

bruker vinkler i beskrivelsen. Et positivt bidrag for å slutte en krets ble notert med  $+90^\circ$  mens et negativt bidrag fikk  $-90^\circ$ . Begge beskrivelsene fungerer bra.



Figur 3 "Dal-topp"-beskrivelse:

Topp, dal, topp, topp, topp, dal, dal, topp, topp, dal, topp

Vinkelbeskrivelse:  $+90^\circ - 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ - 90^\circ + 90^\circ$

Prøving og feiling gir raskt en fem-seks mulige plane 16-kretser. Elevene tror fort de har funnet alle løsningene. De tror gjerne at antall mulige plane kretser danner en pen rekke: Ved 4 elementer 1 krets, ved 8 elementer 1 krets, ved 12 elementer 3 kretser (figur 4), altså ved 16 elementer selvsagt 5 kretser (regel: *pluss to*), eller 6 (regel: *ganger to*). Dette blir egentlig ikke noe skikkelig regelen når en ser på følgen 1-1-3-6).

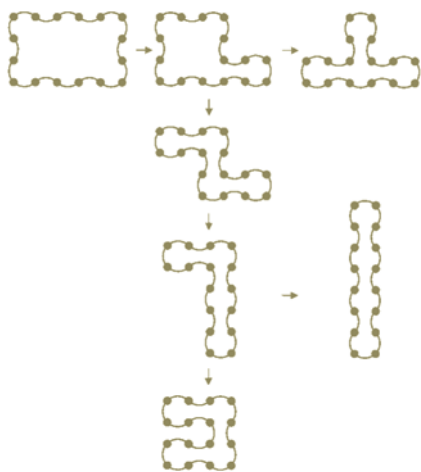
Men det finnes faktisk en syvende krets. Mange lag finner ikke denne kretsen fordi de ikke klarer å lage et godt nok system.



Figur 4: Krets 1, krets 2 og krets 3

Å finne et godt system er ikke så lett. Alle mulige former for 16-kretser skal finnes. Da kan det være lurt å gå tilbake til 12-kretsene. Hvordan oppstod disse?

Krets 2 oppstod fra krets 1 ved å speile de stiplede elementene om linjen som forbinder endepunktene av den stiplede linjen (se figur 4). Krets 3 oppstår fra krets 2 ved å speile de stiplede elementene om linjen som forbinner de to nestøverste punktene i figuren. Tilpasser vi speilingsprosessen til 16-kretsen så finner vi 7 muligheter. Her må en bemerke at et speilbilde av en krets ikke teller som en ny krets.



Figur 5

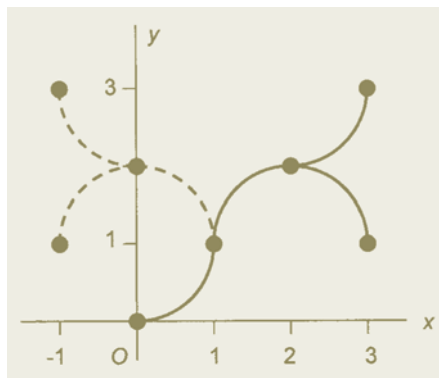
Det er rett frem å forklare at en ikke kan lage en plan krets med et oddetall elementer. Elevene kan for eksempel si: "Det er da logisk, at noe som er oddetall ikke kan slutte i planet."

Naturligvis er dette ikke en fullgod forklaring. For å kunne svare ordentlig på dette spørsmålet må en ha valgt en god måte å beskrive kretsene. Siden "topp" og "dal" nøytraliserer hverandre blir en lukket krets beskrevet av "topp + topp +  $(n - 4)/2$  (topp + dal) + topp + topp". Her er  $n$  en verdi der det er mulig å lage en plan  $n$ -krets. For oddetall  $n$  blir tallet  $(n - 4)/2$  aldri et heltall og dette tilfellet er dermed umulig.

En noe enklere forklaring benytter seg av et vinkelargument. En krets er lukket når bidraget fra alle buelengkene samlet sett er  $360^\circ$ . I eksemplet som vi ser i figur 3 gjelder altså  $+90^\circ - 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ - 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$  (forutsatt at start- og sluttelementet kan koples sammen). Et oddetall elementer kan derfor aldri forme en lukket plan krets siden "vinkelsummen" aldri blir  $360^\circ$ .

Er en 6-krets mulig?

Figur 5 viser en mulig tilgang. En sammenkobling av tre buelinker blir plassert på et koordinatsystem. Radiusen for buelengkene er 1. Med utgangspunkt i origo tenker vi oss nå tre nye sammenkoblede elementer plassert slik at de passer sammen med den første buelinken som lå der fra før. Vi finner at de mulige sluttkoordinatene for den tredje buelinken er  $(-3,1)$ ,  $(-3,-3)$ ,  $(1,1)$ ,  $(1,3)$ ,  $(-3,-1)$ ,  $(-3,-3)$ ,  $(1,-1)$  og  $(1,-3)$ . En ny tilsvarende 3-lenke vil altså ikke kunne lukke kretsen. En 6-krets er umulig. En liknende situasjon inntreffer for 10-kretser, 14-kretser osv.

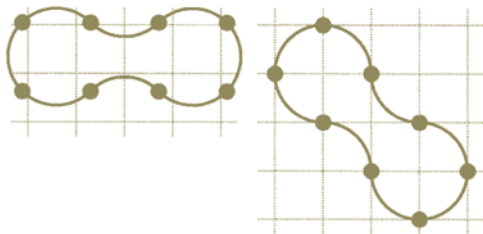


Figur 6. Sluttkoordinatene for den tredje buelinken er:  $(-1,1)$ ,  $(-1,3)$ ,  $(3,1)$  og  $(3,3)$

For hvilke verdier av  $n$  er en lukket  $n$ -krets mulig? Slik lyder det første generelle spørsmålet. De fleste lagene er på sporet av at  $n$  må ligge i firegangen, men få klarer å formulere det.

”Hvilke arealer kan forekomme for 12-, 16-, ...  $n$ -kretser?”

Det første en må gjøre her er å vise at arealet som omslutes av en 8-krets er  $\pi + 4$ . Mange elever kan ikke løsrive seg fra sin horisontale tegning, se figur 7. Har elevene først innsett hvordan en kan angripe denne 8-kretsen er den videre bestemmelsen av arealene ingen problem lenger.



Figur 7

Ofte teller elevene opp antall hele ruter som blir dekket av figuren og etterpå teller de opp buktene langs kanten. For en 12-krets ser det ut til at arealet er  $\pi + 8$ . I to av tre tilfeller er det faktisk korrekt, men i det siste tilfellet går det skeis. Arealet av denne figuren er  $\pi + 16$ . Noen lag hopper galant over dette problemet i farten. Deres konklusjon er at arealet av en  $n$ -krets er lik  $\pi + n - 4$ . Heldigvis ser de fleste lagene at flere verdier kan være mulige for kretser med samme  $n$ . I motsetning til det minimale flateinnholdet ser det ut til å være vanskelig å utlede en generell formel for det maksimale arealet. Elevene leter også her i de konkrete eksemplene.

For en  $n$ -krets finnes det altså ikke noe entydig svar for flateinnholdet bortsett fra  $n = 4$  og  $n = 8$ . Noen undersøkelser viser det følgende:

n	Minimal flate	Maksimal flate
4	$\pi$	$\pi$
8	$\pi + 4$	$\pi + 4$
12	$\pi + 8$	$\pi + 16$
16	$\pi + 12$	$\pi + 28$

n	Minimal flate	Maksimal flate
20	$\pi + 16$	$\pi + 48$
24	$\pi + 20$	$\pi + 68$

Arealet blir minimalt ved en krets som er så lang og smal som mulig. Minimal flate for en  $n$ -krets  $= \pi + n - 4$ . Flaten er maksimal når kretsen likner mest mulig på et rektangel der sidene atskiller seg minst mulig (likner mest mulig på et kvadrat). I tillegg må hver side bestå av et odde antall buelener. Når  $n/4$  er odde kan alle de fire sidene bestå av  $n/4$  elementer. Flaten

er lik arealet av kvadrat der sidene er  $\frac{n}{4}\sqrt{2}$

pluss arealet av de fire ”månene” som sammen utgjør en sirkel med radius 1 minus det lille innskrevne kvadratet. Til sammen gir det for arealet:

$$\left(\frac{n}{4}\sqrt{2}\right)^2 + \pi - (\sqrt{2})^2 = \pi + \frac{n^2}{8} - 2$$

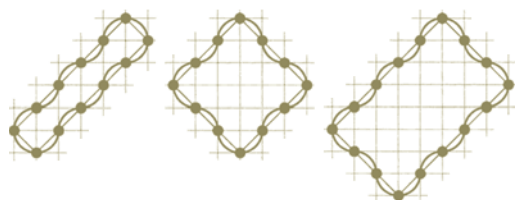
når  $n/4$  er odde.

Når  $n/4$  er jamn finner en det maksimale arealet når sidene i rektangelet har ulik lengde. Sidene i det ene paret består av  $n/4 + 1$  buelener mens sidene i det andre paret består av  $n/4 - 1$  buelener. Arealet er nå:

$$\left(\frac{n}{4}-1\right) \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{n}{4}+1\right) \cdot \sqrt{2} + \pi - (\sqrt{2})^2 = \pi + \frac{n^2}{8} - 4$$

når  $n/4$  er jamn.

Hvilke mellomliggende verdier som er mulig for flateinnholdet er ikke blitt studert.

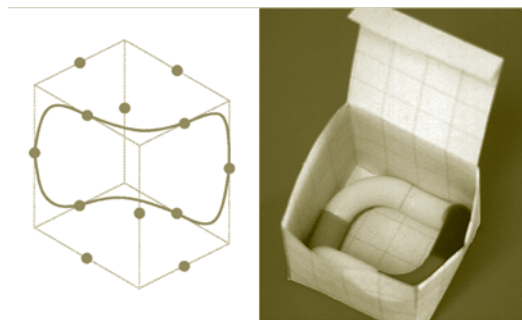


Figur 8. Forskjellige arealer med 12 og 16 lenker

### En krets i et begrenset rom

Med buelenkene kan en også forme romlige konstruksjoner. I rommet har en uendelig mange konstruksjonsmuligheter. I denne delen av oppgaven blir imidlertid bevegelsesmulighetene begrenset. Buelenkene skal ligge i flatene av et kubisk gitter. Endepunktene av buelenkene ligger stadig midt på sidene i "klossene" i gitteret.

Her ser det ut til at to forskjellige 6-kretser oppfyller kravene. Den ene av disse 6-kretsene er fritt bevegelig den andre lar seg ikke rikke. Også en 8- og en 10-krets er mulig under de gitte betingelsene. Elevene skal finne mange 8- og 10-kretser. De finner mange og gleden er stor for hver ny. Oppgaven er friere og i deres øyne også lettere. Med et oddetall buelenker ser det likevel ut til å være umulig å lage en krets som passer i et kubisk gitter. Derfra slutter de fleste lagene at det er mulig å lage en krets i rommet i et kubisk gitter så snart  $n$  er et partall. Vi må selvsagt ha at  $n \geq 6$ .

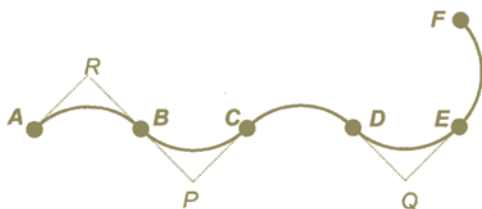


Figur 9. En 6-krets i rommet

### Det frie rom

Et artig tilfelle i det frie rommet er  $n = 5$ , se figur 9. Ved å holde fast buelenken  $CD$  kan lenkene  $AB$  og  $BC$  dreie fritt. Punkt  $P$  (skjæringspunkt mellom tangentene i  $B$  og  $C$ ) ligger hele tiden fast på samme stedet. Det betyr at  $B$  beskriver en sirkel i forhold til  $P$ . Men det innebærer da at også  $R$  (skæringspunktet mellom tangentene i  $A$  og  $B$ ) beskriver en sirkelbane rundt  $P$ . Punkt  $A$  på sin side går i sirkelbane om  $R$ . Punkt  $A$  sin bevegelse i forhold til  $P$  er altså en sirkelbevegelse med radius  $AR = 1$  koplet sammen med en sirkelbevegelse med radius  $PR = 2$ . I forhold til  $P$  beveger punkt  $A$  seg på en kuleoverflate med radius  $AP$ . Imidlertid må det bemerkes her at  $A$  ikke kan komme i alle posisjoner som har avstand  $AP$  fra  $P$ . Punkt  $A$  beveger seg kun på en del av kuleoverflaten. Avstanden  $AP$  er lik  $\sqrt{5}$ , siden trekanten  $\triangle APR$  er rettvinklet med  $AR = 1$  og  $PR = 2$ . På samme måte kan en vise at avstanden mellom punktene  $F$  og  $Q$  alltid må være lik  $\sqrt{5}$ .

De fleste elevene kommer dit uten hjelp. Noen grupper trenger et lite dytt i ryggen: Finn ut hva som skjer med punkt  $P$  når en dreier på lenkene  $AB$  eller  $BC$ . Mer trengs det vanligvis ikke.



Figur 10

### Egne undersøkelser

Som siste underpunkt blir elevene utfordret til selv å formulere og løse noen oppgaver. Noen

(fortsettes side 28)

Det er gunstig å arbeide med skyggelegging i denne sammenhengen spesielt dersom elevene bare bruker blyant. Med fargeblyanter er det en fordel at en av sideflatene på terningene har samme farge. Det gjør at dybden i tegninga kommer tydeligere fram. I eksemplene under har terningene i det ene bildet samme farge på "lokket". På det andre bildet har terningens venstre sideflate samme farge.

Siden sommerkurset 2005 har vi fått ny læreplan. Der er perspektivtegning med som et av kompetansemålene både etter 7. og 10. trinn. Innholdet i denne artikkelen mener jeg kan brukes som en introduksjon til og oppstart på perspektivtegning.

#### Referanser

Tvete, K. (1990): *Geometri – Jordmåling, tverrfaglige temaer*. Landås: Caspar forlag

Torkildsen, S. (red.): *LAMIS sommerkursrapport 2006*

---

(fortsatt fra side 19)

forslag blir gitt. Dessverre er motivasjonen brukt opp og elevene ser seg ikke råd til å ta fatt på denne utfordringen. Kanskje oppgaven skulle ha stått først?

#### Til slutt

De fleste elevene var entusiastiske over oppgaven. Det å arbeide med konkret materiell falt i smak. Oppgavene var utfordrende og svarene på ingen måte opplagte. En måtte virkelig gjennomføre undersøkelsene og tenke seg godt om. Lærerne var også tilfredse. Elevene har arbeidet bra. Innsatsen og samarbeidet var upåklagelig, noe som ikke alltid er tilfellet under andre praktiske oppgaver.

Oppgavenivået var tilstrekkelig høyt samtidig som alle kunne fullføre oppdraget. Kunnskaper og begreper fra et vidt spekter ble bragt sammen og gjennom dette ble integrert matematikkunnskap stimulert. Risikoen for at elevene skulle benytte seg av eksisterende ferdige interettløsninger var ikke stort.

Det er viktig at elevene er forberedt på matematikkdagen. Hva er det for noe? Må man være flink i matte? Les først gjennom oppgavene, fordel så arbeidsoppgavene (hvordan samarbeide) osv. La elevene bevisst ta pauser, ellers faller de helt sammen, når de kommer til ettermiddagen.

Det er viktig med god tilgang til PC-er gjennom hele dagen. Prøv å overholde tiden for innføringen. Foreta gruppeinndelingen (4 elever) på forhånd.

#### Internettkilder

[www.tangletoys.com](http://www.tangletoys.com) er websiden til utvikleren og leverandøren til buelenkene.

[www.fi.uu.nl/wisbdag](http://www.fi.uu.nl/wisbdag) er websiden til Freudenthal Instituttet med oppgaver og forslag til matematikkdagen.