

Ingvill Merete Stedøy-Johansen,
May Renate Settemsdal

Matematiske modeller er ikke alltid rette linjer!

(etter en ide fra Anders Isnes, Naturfagsenteret)

Matematiske modeller vi lager på skolen med eksperimentelle (empiriske) data, har en tendens til å gi tilnærmet lineære funksjoner. Anders Isnes fra Naturfagsenteret viste et enkelt eksperiment med fritt fall av muffinsformer. Dette blir fall med luftmotstand, og det viser seg at det blir en ikke-lineær funksjon.

Problemstillingen er som følger. *Hva blir sammenhengen mellom antall muffinsformer (lagt inni hverandre) som slippes fra en bestemt høyde og tiden de bruker på å falle til bakken?*

Vi skal ikke bruke avansert fysikk for å finne en formel, men vi skal samle noen empiriske data som gjør oss i stand til å tegne et grafisk bilde av denne sammenhengen. Denne grafen kan fungere som en matematisk modell for sammenhengen vi er ute etter. Gjort på denne måten, kan dette opplegget fungere godt i ungdomstrinnet, både for å få en bredere forståelse av funksjonsbegrepet, og for å se en ikke-lineær modell av et fysisk fenomen. Vi viser til slutt i artikkelen hvordan elever med fysikk i videregående skole, kan beregne funksjonsuttrykket teoretisk.

Eksperimentet krever bare at elevene har

tilgang på muffinsformer, og at de har en god stoppeklokke.

Elevene arbeider to og to. De må lage seg en tabell til å notere tider for de forskjellige antallene med muffinsformer. Diskuter med elevene hvor mange forsøk de skal gjøre med hvert sett av muffinsformer for å få et godt resultat. Kan-skje de må prøve noen ganger med bare 1 muffinsform for å se hvor gode de er til å ta tiden. Ut fra erfaringene med dette, bestemmer de hvor mange målinger de skal ha på hvert sett. For å få kun én verdi, bruker de gjennomsnittstidene av målingene for hvert sett. I eksempelet nedenfor har vi målt to ganger for hvert sett. Muffinsformene må slippes fra samme høyde hver gang.

Alle skal måle tidene for 1, 2, 3, 4 og 5 muffinsformer. Dette skal gi 5 punkter i et koordinatsystem. Ut fra punktene skal de tegne en glatt kurve, som skal forlenges utover x -aksen til det går an å lese av hvilken tid som skal forventes hvis 10 muffinsformer ligger inni hverandre. Når avlesningen er gjort, skal de teste ut om det stemmer.

Diskuter modellen og gyldigheten av den med elevene.

Ingvill Merete Stedøy-Johansen,

Matematikksenteret

ingvill@matematikksenteret.no

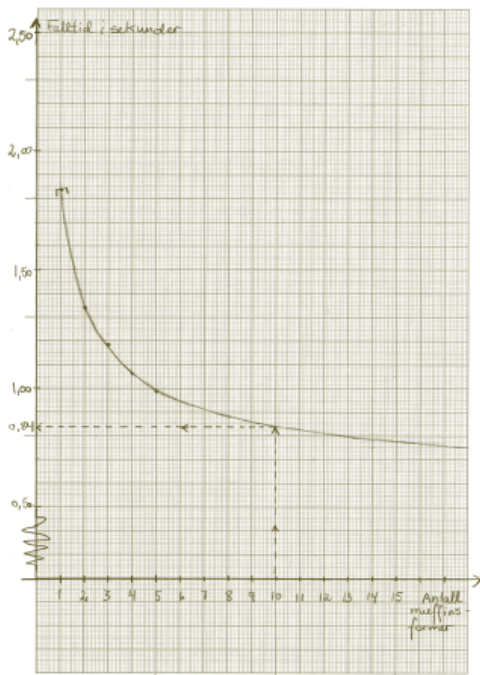
May Renate Settemsdal, Matematikksenteret

May.Settemsdal@matematikksenteret.no

Eksempel

Hvis vi tenker oss kurven forlenget, kan vi gjette og sjekke for 20 muffinsformer (se tabell).

Hvordan vil funksjonsuttrykket for denne kurven se ut? Det er i alle fall ikke ei rett linje! Diskuter med elevene at en lineær modell ville



ende opp med at muffinsformene går i bakken på 0 sekunder hvis vi har 10 – 15 muffinsformer inni hverandre. Det kan jo ikke være riktig. For elever i ungdomstrinnet kan det være nok å konstatere at dette er en krum kurve som de ikke kan nok matematikk til å forstå funksjonsuttrykket for. For elever som har valgt fysikk og matematikk i videregående skole, er det fullt mulig å kunne forstå at dette ser ut som en slags eksponentialfunksjon. Fysikkens lover gjør dem

i stand til å beregne funksjonsuttrykket.

Tor Andersen ved Matematikksenteret har sett på en teoretisk matematisk modell for fritt fall med luftmotstand. Mange elever er frustrerte over at de i skolefysikken i videregående skole bare får regne på fritt fall *uten* luftmotstand. Det ville føre til at en fallskjermhopper som hopper ut fra 10 000 meters høyde, ville treffe bakken med en fart på nesten 1600 km/t. Noen elever kan komme til å forlate skolen i fast tro på at farten er uavhengig av massen når det dreier seg om fritt fall, sier Andersen.

Hvis vi setter opp en differensiallikning som beskriver hastigheten ved fritt fall der luftmotstanden er b , får vi følgende likning:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - b \cdot v^2$$

Hvis vi løser denne differensiallikningen og forutsetter at utgangshastigheten er 0, får vi:

$$v(t) = \frac{\sqrt{\frac{mg}{b}} (e^{\frac{2}{m}\sqrt{mgb} \cdot t} - 1)}{(e^{\frac{2}{m}\sqrt{mgb} \cdot t} + 1)} = \sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh\left(\frac{\sqrt{mgb}}{m} t\right)$$

Ved å integrere $v(t)$ fra 0 til t , finner vi et uttrykk for strekningen gjenstanden har falt. Det kan vi bruke til å beregne luftmotstanden b ut fra de empiriske dataene.

Antall muffinsformer, x	Tid 1 i sekunder	Tid 2 i sekunder	Gjennomsnittstid $T(x)$
1	1,84	1,84	1,84
2	1,37	1,31	1,34
3	1,18	1,19	1,185
4	1,06	1,06	1,06
5	1,00	0,97	0,985
10			Avlest: 0,84, målt: 0,83
20			Gjettet: 0,78, målt: 0,75