

Toril Eskeland Rangnes

# Vekst og grafer – modellering sammen med 8–9-åringer

Kan matematisk modellering være et tema for elever på de laveste trinnene? Selv var jeg skeptisk da jeg startet prosjektet med å prøve ut arbeid med vekst og grafer i klassen jeg den gang var klassestyrer for. Elevene hadde bare to-tre timer med multiplikasjon bak seg da vi startet prosjektet. Vi arbeidet med tre tverrfaglige tema: Innsamling av tegneserier til klassebibliotek, pengeinnsamling til Kirkens nødhjelp og vekst på antall sauer på gården dersom alle lammene fikk leve. Det ble altså tatt utgangspunkt i aktuelle temaer for klassen. Jeg ønsket å finne ut elevenes strategitenkning, hvilket matematisk språk de brukte og hva de leste ut av grafer de selv laget. Prosjektet ble dokumentert gjennom elevers og min loggskrivning, samt produkter elevene laget.

## Lineær vekst

Serieheftene: Jeg startet med et aktuelt tema i klassen. Vi ville ha seriehefter til klassen slik at elevene hadde litt mer lesestoff i klasserommet. Hvor mange ville vi få dersom alle tolv elevene tok med seg to hefter, hvor mange dersom alle tok tre, fire eller fem hefter? Alle hadde kanskje ikke tegneseriehefter til å ta med seg. Hvor mange fikk klassen om bare en elev tok med

seg? To elever? Tre elever? Fire? Osv.

Så startet jeg friskt med å fortelle hva de skulle gjøre, men dette var nytt og de satt som levende spørsmålstegn. Selv om de hadde vært borti søylediagram ble dette likevel noe annerledes. Her var det best å sette elevene i gang og forklare litt underveis. De satt i grupper og jeg bad hver gruppe velge ”innsamling” av to, tre, fire eller fem hefter.

Vi brukte Unifixklosser, en kloss var ett blad. Så skulle de bygge oppover hvor mange hefter det ble om en elev tok med det antallet de hadde valgt, to elever, tre, fire osv. De fikk lapper som de skrev antall elever på og som de la under tårnene slik at de visste hva de hadde bygd. Det typiske var at alle helst ville sette det høyeste tårnet først. Det var tydeligvis mest spennende å bygge. Dessuten kan det være at de ble påvirket av åpningsspørsmålet om hvor mange hefter det blir dersom alle tar med seg  $x$  antall hefter.

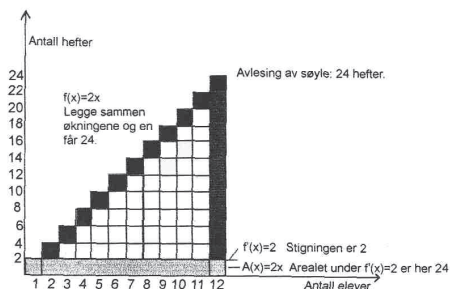
## Hvordan lese grafen?

De bygde tårna og ble etter hvert ferdige. Jeg spurte ei gruppe om hvor mange hefter vi får dersom alle i klassen tar med seg 2 hefter hver. ”Over hundre har vi talt”, var svaret. Alle klossene de hadde brukt til bygging av søylene hadde blitt talt. Jeg ba dem tenke og diskutere om det kunne være rett. Ei lita stund etter hadde de svar klart. ”Det blir 24!” ”Hvordan fant dere det?” ”Jo, vi talte klossene her nede to, fire, seks,

**Toril Eskeland Rangnes**, NLA Lærershøgskolen  
[toril.rangnes@lh.nla.no](mailto:toril.rangnes@lh.nla.no)

....., 24.”

Helt intuitivt leser de av arealfunksjonen. Funksjonsforskriften til grafen er  $f(x) = 2x$  der stigningen (den deriverte) er 2. Elevene leste av arealet som ligger under stigningen  $f'(x) = 2$ .



En annen så på økningen, eller ”trappene” som han sa. Fem, ti, femten osv. Noen så på høyeste tårnet og talte oppover. Det gjorde de spesielt når de bygde grafen med klossene.

Elevene leste grafen på en annen måte enn jeg hadde forventet. De viste meg tre ulike måter å finne hvor mange hefter vi fikk til sammen. Dersom jeg hadde fortalt (slik vi lærere ofte gjør) hvordan de skulle lese grafen, ville elevene av meg bare fått vite en måte å gjøre det på. Elevene åpnet faktisk øynene på meg slik at jeg så at sammenhengen mellom arealfunksjon av den deriverte til funksjonen, stigningen og avlesing av punkt ligger nokså tydelig i grafen. Det er faktisk naturlig å lese en graf på disse tre måtene dersom en bare ikke har hengt seg opp i en tillært løsning.

### Hvilke tanker ligger i elevenes løsninger?

To grupper begynte å telle ”elev en har to, elev to har to, det blir fire. Elev tre har med to, det blir seks” osv. I denne tenkningen står  $x$  for elevnummer og ikke antall elever. I stedet for tallene kunne elevenes navn stått. Det ligger altså en litt annen tenkning bak enn når en teller oppover (leser av et punkt), for da ser en mengden som tolv elever har samlet inn mer som en enhet. Han som la sammen stigningen så tydelig at for hver elev som kom med hefter økte (steg)

antallet med fem blader. Ved å legge sammen økningen fikk han antall hefter det ble dersom tolv elever tok med seg fem blader hver. Tenkningen bak var ulik, likevel kom alle fram til rett resultat. På meg virket det ikke som det var vanskelig for elevene å forstå hverandres måte å gjøre det på.

### Tegning av grafen

Vi tegnet så omrisset av trappa på et stort papir og først da kom koordinatene opp. Nede skrev vi antall elever og oppe skrev vi antall hefter. Elevene så ganske snart at det vi drev med var gangning. De kjente igjen tallmønstrene enda vi bare hadde holdt på med gangning i et par skoletimer før prosjektet startet.

Var det så noen vits i å tegne grafen? Ei gruppe oppdaget plutselig at de hadde gjort litt feil, trappetrinnene var ikke like høye, men nå fant de fort ut hva de måtte gjøre for å rette det opp igjen. Ved fargelegging i ulike farger på hver ny ”blokk” så elevene tydelig multiplikasjonen som gjentatt addisjon.

De fant også ulike måter å manipulere med gangning for å finne hvor mange det ble når de støttet seg til konkretiseringen grafen gav dem. Hanne: ”Først tok jeg  $10 \cdot 2$  som er 20 og så  $2 \cdot 2$  som er fire, da blir det 24”.

Sammen fant vi også ut at dersom vi la sammen det høyeste tårnet på tre hefter og det høyeste på to hefter ble det til sammen like høyt som det høyeste tårnet på fem hefter.

### Høyeste tårn

Mens jeg hengte opp grafene spurte jeg elevene om de visste på forhånd hvilke gruppe som fikk høyest tårn. ”Ja, 5 hefter sjølsagt”, sa en. ”Nei, det var ikke sikkert,” sa Daniel. ”Dersom ikke alle hadde fem hefter og for eksempel halvparten tok med seg bare tre hefter så er det ikke sikkert at de som skulle ha med seg fem fikk mest”. Vi hadde laget modellene i fellesskap så her kom noen av forbeholdene inn. Hva hvis ikke alle har så mange hefter? Lærer: ”Dersom det var som du sa Daniel, hvem ville da få flest hefter?” Etter en

tenkepause kom det: ”Jo, de som hadde fem og tre ville få mest likevel.” Denne samtalen viser ikke så mye til grafen, men jeg synes at Daniel her viser en klar forståelse for hva vi driver med. Noe er matematikk og noe er virkelighet. Og han viser at arbeidet med grafen ikke har fjernet han fra det vi jobber med. Her snakkes det om hefter og ikke bare om tårn, enda det var tårnene som var utgangspunktet for samtalen.

### Virkeligheten

Da vi hadde samlet inn hefter flere uker senere fikk vi inn 25. Jeg spurte hvor mange hefter elevene i gjennomsnitt hadde tatt med seg. Janne konkluderte fort med at elevene hadde tatt med to hefter hver, og da var det ett hefte i tillegg. Hun hadde arbeidet med to hefter per elev og hadde trolig bilde av grafen og husket tallet tre uker etter vi hadde jobbet med dette.

### Pengeinnsamling

Vi tok en lignende oppgave. Nå var det pengegave til en aksjon vi hadde på skolen der vi oppfordret elevene til å samle litt penger inn til Guatemala og Afghanistan. Det hadde tidligere vært vanskelig å få motivert elevene til en slik aksjon. Derfor ville jeg denne gangen prøve å motivere elevene litt også gjennom matematikktimene. Mange elever tror kanskje de må gi så mye for at det skal nytte. Jeg ønsket at de skulle se at dersom alle gir litt blir det til sammen ganske mye. Panting av flasker er kjent for de fleste i denne aldersgruppen, så det ble utgangspunktet vårt. Vi beregnet et gjennomsnitt på to kroner per flaske. Spørsmålet var da hvor mange flasker elevene ville samle. Forslagene fra elevene var fire, fem og sju flasker.

Denne gangen skulle gruppene lage tallpar først og så tegne søyler på ark. Vi gjorde flaskene om til antall kroner de fikk for det antallet flasker de valgte. Å legge sammen 14 kroner 12 ganger var ikke helt uproblematisk. Det var lettere når de brukte unifixklosser til å bygge med. En uttrykte seinere i en oppsummering, ”med pengene måtte vi bruke hodet!”

### ”Akkurat som med heftene!”

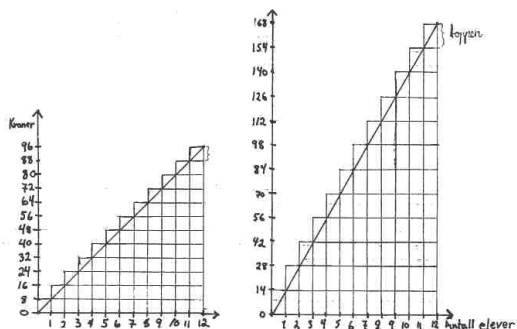
Denne gangen gikk det fort å tegne søylene. Her fikk også hvert trappetrinn eller ”blokk” sin farge. Ei rute på arket var her to kroner. Elevene så fort, og viste glede over å se, sammenhengen med forrige oppgave. ”Det blir akkurat som med heftene, jo!” Ei gruppe måtte legge vekk tallparene, for de oppdaget under tegning av grafen at de hadde regnet feil. Trappene ble ikke jevne.

Elevene så sjøl at de holdt på med gjentatt addisjon, og at de kunne sette det opp som gangestykker. I plenum ble begge måtene skrevet opp. Men når de senere skulle skrive hva de gjorde på denne oppgaven skrev de at de plusset. Marte skrev ”Det var bare  $14+14+14+14$  hvis vi plussa til i stedet for å gange”. Til oppgaven om heftene skrev de at de lærte ganging. Kanskje det var fordi de der møtte igjen tallmønster de hadde sett før?

### Hva ser elevene i grafene?

Når vi skulle oppsummere hengte jeg opp grafene deres og stilte et svært åpent spørsmål: ”Hva ser dere?” ”Alle har en topp og toppene er ikke like store.” Vi ble enige om at det var fordi de samlet inn ulikt mange kroner for hver elev. ”Men,” spurte jeg, ”hvorfor blir det ene tårnet så mye høyere enn det andre når det bare er to kroner som skiller?” Her pekte jeg på grafen som viste hvor mye det ble med 8 kr per elev og så grafen med 10 kr per elev. ”Jo,” svarte Janne, ”det er fordi at 12 elever tar med seg til sammen 24 kroner mer der.” Hittil har elevene klart å holde fast på penger og elever selv om jeg snakket om tårn, men så ville jeg ha dem til å se at det var ulik stigning i grafene de hadde arbeidet med. Jeg tegnet derfor en sammenhengende strek på hver graf og førte tavlelinjalen bortover og spurte hva de nå så. ”Den med 14 kroner får lengst strek.” ”Den går mer beint opp” (om grafen med 14 kr per elev). ”Den med lavest antall kroner går liksom mer ut på siden.” Her stoppet det i farten litt opp for meg. Hva kunne han mene med mer ut på siden? Vi stoppet jo

på tolv elever på alle grafene? Samtidig følte jeg at jeg så det samme, den går jo liksom mer ut på siden, så jeg protesterte ikke, jeg måtte bare komme tilbake til det senere. ”Dersom dette var en bakke, hva ville dere sagt om den?” ”Kjempebratt,” var uttrykket jeg da fikk. ”Den er brattest” (om 14 kr per elev).



”Hvor bratt kan det bli?”

Nå var vi virkelig begynt å bli generelle, og det er litt skummelt med 8-9 åringer. Mitt spørsmål ble så hvordan grafen ville se ut dersom hver elev hadde tatt med seg 20 kroner. ”Den ville gått beint opp,” meinte Christian. ”Nei, den ville tippe over på andre sida (andre sida av Y-aksen),” meinte Daniel. Her var de gått helt bort fra hva koordinatene stod for og gjettet ut ifra et synsinntrykk og en utvikling de mente å se. Vi kikket så litt på hvordan det ble dersom en, to eller tre elever tok med seg tjue kroner og da kom det kjapt, ”den blir bare brattere!” Det kan hende kunnskapen var situert, men jeg ser det slik at elevene her gjorde en nyttig erfaring. Slik jeg oppfatter situasjonen førte den sammenhengende streken elevene bort fra den virkeligheten de var i. Den ble for abstrakt. Det var lettere med trappene, da så en hvor mange kroner det økte med hver gang antall elever økte. Trappetrinnene på 14 kr var større enn trinnene med 8 kr.

”Streken går liksom mer ut på siden”

Jeg kom tilbake til eleven som sa at streken gikk

liksom mer ut på siden der det var minst. Han husket da ikke hvorfor han hadde sagt det og han så at det slutta på tolv elever på alle. ”Men dersom jeg vil samle inn like mye penger her som der det var mest (pekte her på den med 10 kr da jeg nå bare hadde denne oppe), hva måtte vi gjort da?” ”Samle inn 14 kr der óg,” var første svaret. ”Ja, men dersom vi fremdeles skulle ha 10 kr per elev hvor ville streken gå da for å komme opp på 168 kr?” ”Jo, da må streken fortsette mer ut på sida.” Lærer: ”Ja, men se her nede, her var det 12...” ”Ja, da må det bli omtrent 14 elever da,” var svaret. 14 elever var ikke rett, men han måtte gjette fordi koordinatene ikke var merket så langt ut. Det han så var at dersom han ville samle mer penger med samme antall kroner per elev, måtte flere elever samle. Jeg tror han oppfattet en sammenheng mellom det han intuitivt så med streken som liksom gikk lenger ut på sida, og det han her så med støtte.

### Ekspontiell vekst

Sauegården vår. Jeg ønsket også å prøve ut en annen type graf, og jeg tok da tak i eksponentiell vekst. Elevene har godt kjennskap til gården til Mikal. Han besøker vi to ganger i året. Han har sauer, og om våren yrer det med lam. Om høsten blir ganske mange slaktet. Dette syntes elevene var ille. Vi hadde tidligere snakket om at gården produserer mat og om hvordan det ville være om alle sauene fikk leve. Elevene visste at Mikal har to værer og ca 30 søyer. De fleste sauene fikk tvillinger. Så startet vi med vårt tankeeksperiment: ”Hva om vi startet gård og begynte med to lam første året, hvor mange ble det på gården etter ti år dersom alle fikk to lam, en han og en hun, hvert år?” Først måtte de finne tallmønsteret. De fikk et skjema der de skulle fylle ut hvor mange par som fikk lam, hvor mange nye lam og hvor mange sauer i alt.

### Kjærestepar

Et problem som dukket opp for elevene var at et par sauer er det samme som to sauer. De fikk

År	Nye lam	Antall par som får lam	Antall sauer tilsammen	Mante
1.	2	0	2	
2.	2	1	4	
3.	4	2	8	
4.	8	4	16	
5.	16	8	32	
6.	32	16	64	
7.	64	32	128	
8.	128	64	256	
9.	256	128	512	
10.	512	256	1024	

papirsauer som de skulle legge utover, og jeg ba dem farge blå bjelle på væren. Likevel fikk de problemer med antall par og antall sauer. Da jeg til slutt kalte vær og søye for kjærestepar klarte de å håndtere begrepet "et par sauer". Dette forundret meg ettersom vi hadde hatt om partall og antall par tidligere uten problem.

### System eller kaos?

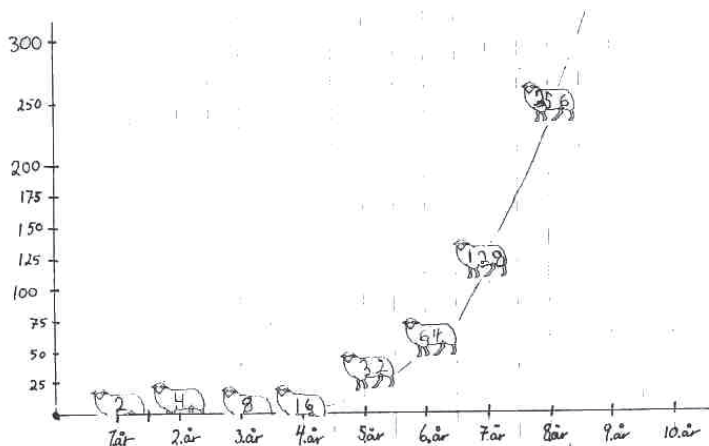
Vanskelig var det også at sauene fikk lam hvert år og ikke bare en gang i livet. Det ble dessuten fort mange sauer å holde orden på. Jeg lurte på hvor mange sauer de kom til å legge utover før de gikk over til å se på tallmønsteret og finne ut av systemet. De fleste elevene la ut rundt 32 sauer før de gikk over til å regne. Men de fleste gruppene måtte begynne på nytt igjen med utlegging av sauer mange ganger før de forstod hva de gjorde. Så begynte flere gutter å melde seg ut og lage uro. Jeg opplevde på det tidspunkt hele opplegget som fiasko. Likevel fortsatte jeg i neste time, men da med guttene i egen gruppe for at de skulle finne løsningen selv. Dette gikk over all forventning. De så systemet fort og kom

raskt i mål. Janne fant ut av systemet med en gang (allerede i første timen vi jobbet med det), men hun fikk kjempeproblem med å få de på gruppa med seg. Hun forklarte og jeg kunne ikke sagt det bedre, men ikke tale om. Gutten på den gruppa nektet å legge ut en eneste sau så lenge han ikke forstod. Da han kom i guttegruppa ble han heiagjeng for han som først så systemet, men selv klarte han aldri å forstå tallmønsteret. De andre skjønnte hvordan tallmønsteret utviklet seg. De så det ble mer og mer. De fikk store tall og det var kjempegøy.

### Hvordan vil grafen se ut?

Da de skulle tegne grafen spurte jeg om hvordan de trodde grafen ville se ut. Daniel som hadde vært borte under jobbinga med papirsauene så på tallene og mente den ville se ut som de andre, med pengene og heftene. Ingen protesterte, men jeg så en viss usikkerhet i ansiktene. Vi satte i gang med å tegne grafer. Denne gangen limte vi på små sauer i stedet for å tegne søyler. Antall sauer ble skrevet på sauene. Dette gjorde jeg fordi jeg ville de skulle holde fast på hva vi drev på med. Koordinatene hadde jeg tegnet inn på forhånd. En rute var nå 25 sauer. Det ble vanskelig i starten. I de første åra var antall sauer under 25 slik at en ikke kunne se at det vokste. Senere måtte de finne det nærmeste tallet på Y-aksen, for eksempel dersom antall sauer var 128 måtte de lime papirsauen på 125.

Etter kort stund med liming av papirsauer uttaler Christian: "Jeg ser hvorfor det blir slik, det er fordi vi legger til større og større tall!" To dager senere skriver han i loggen sin: "Vi dobla og dobla!" Han som først meldte seg helt ut



klet seg slik som de andre oppgavene. Som Christian sa: ”Jeg ser hvorfor det blir slik, vi legger til større og større tall!” For senere å skrive: ”Det doblet seg og doblet seg!” Dette siste ville kanskje blitt tydeliggjort for flere om vi hadde fargelagt søylene. For Christian ble nok det visuelle bildet en bekreftelse på det han så i tallmønsteret han laget.

hadde virkelig forstått hva han jobbet med!

Jeg tror elevene oppfattet rutene under sauene som søyler, selv om søyler ikke ble tegnet. Det siste elevene gjorde med grafen var å tegne streker mellom sauene.

### Samtalen rundt grafen

Når elevene snakket om hvordan tallene vokste ut i fra grafen var de veldig generelle: ”Det vokser mer og mer”, ”Vi plussa større og større tall”, ”Til slutt fór det rett til værs”, ”Det gikk sakte og så litt fortere og så gikk det rett opp!” Det var slik at jeg lurte på om de visste hva som vokste fortere og fortere, ”Jo, det er fødslene,” sa en, ”ja, hvor mange sauer det blir,” sa en annen. I loggen skriver Marte to dager senere: ”Det vokste fortere og fortere, flere og flere sauer slik at vi må bygge gården større!”

Det overrasket meg at elevene snakket i så generelle vendinger om denne grafen. Sauer ble ikke nevnt før jeg spurte elevene hva som egentlig vokste fortere og fortere. I oppgavene før snakket elevene om hefter når jeg spurte om lengste tårn. Eller de snakket om penger når vi så på tårna vi fikk i pengeoppgaven. Jeg tror elevene da følte behov for å bekrefte for seg selv hva de snakket om fordi symbolene var fjernt fra hva de skulle symbolisere, mens de i siste oppgaven ikke trengte å snakke om sauene fordi alle så at det var sauer vi snakket om.

Elevene oppdaget fort at denne ikke utvi-

### For vanskelig?

Sammenhengen mellom grafen og tallmønsteret ble her ganske grei. For elevene var den største vanskeligheten å legge ut sauene og telle dem. Elever som ikke forsto hvordan en fant tallene så greit ut fra grafen hvordan utviklingen gikk. Selv synes jeg oppgaven med sauene var i vanskeligste laget. Flere elever skreiv i loggen at den var vanskeligst, men de samme skrev også at oppgaven med sauene var den kjekkeste. Det var morsomt å se hvor fort det gikk på slutten.

Da vi var ferdig med oppgaven, spurte jeg elevene om vi egentlig hadde lært noe om gård og sauer. Det ble først stille og så kom det fra Janne, ”Vi har i alle fall lært at vi må slakte sauer!” Det var en logisk slutning ut fra situasjonen vi tok utgangspunkt i.

Dersom noen hadde spurt meg om opplegget med sauene midt i prosjektet, ville jeg sagt det var mislykket. Men hva er et mislykket prosjekt? Elevene og jeg var frustrerte, men betyr det at det er mislykket? Ut fra hva elevene skrev og sa om oppgaven var det tydelig at de hadde lært noe. For meg ble det også en lærdom å høste; timer må ikke være strømlinjeformet for at elevene skal få utbytte av dem. Men slitsomt er det når en står midt opp i det.

### Elevenes utbytte

Elevene forstod og fikk mye mer ut av grafene enn det jeg forutså. Deres kommentarer til gra-

fene ble styrende for hva de lærte og hva jeg la vekt på. På denne måten fikk vi et samspill som jeg tror var lærerikt for både elevene og meg selv.

I ettertid ser jeg at forståelsen av ganging ble veldig god i klassen. De er blitt flinke til å bruke sine strategier for å finne svaret når de er usikre. Også da vi skulle ha om koordinatsystemet så jeg de hadde gjort erfaringer som gjorde emnet svært lett. De trakk selv forbindelsen med det de hadde gjort i prosjektet. Vi har gjort erfaringer sammen som gjør at når vi trenger det kan vi spørre ”Husker du det med sauene?” eller ”Er det slik som med innsamlingen?”. Vi har fått knagger å henge nye problem på.

### Etterord

---

Artikkelen er et gjentrykk fra Tangenten nr. 1/1997 med noen endringer. Reaksjoner jeg har fått fra ulikt hold på første artikkel har blant annet vært om hvor realistisk modellen med sauevekst er. Vi opererte med par sauer, han og hun, og alle levde i 10 år. Selvsagt er det ikke virkeligheten, noe elevene var klar over. Mikal hadde bare to værer i fjøset, han trengte ikke flere. Sauer kan leve i ti år om de får muligheten, men som regel vil noen dø av sykdom i virkeligheten. Vi laget en matematisk modell som gav et svært omtrentlig bilde av hvordan veksten kunne ha vært om alle lammene fikk leve. Slik har modellen flere svakheter, med rom for forbedringer. Kanskje det kunne være en utfordring for eldre elever – å utvikle en mer realistisk modell?