Svein Haugerudbråten, Christoph Kirfel

Fjerdegradsfunksjoner og det gylne snitt

Matematikkfagets plass i norsk skole blir av mange begrunnet med dets nytteverdi for samfunnet. Men sammen med dette har faget også vært båret oppe og påvirket av folk med andre innfallsvinkler. Mennesker har sett at selv de som trenger matematikken som et redskap ikke kan komme langt med bare snusfornuftige og økonomiske motiver for å arbeide med faget. Å lykkes i matematikk er vanskelig uten at det tennes en glød og en nysgjerrighet knyttet til det vi gjerne kaller matematikkens skjønnhet.

Ingen som skjønner hva som menes med dette har vært uberørt av sitt møte med *"det gylne snitt"*. Det vi litt provoserende kan kalle "ekte matematikklærere" ønsker å formidle noen av sine estetiske opplevelser rundt matematikk til sine elever. Det er derfor naturlig at de som i bladet CASIO-nytt nr. 3 - 2005 fikk se hvordan ClassPad kunne brukes til å undersøke en spesiell egenskap for en gitt 4. gradsfunksjon ble nysgjerrige. Her viste man nemlig numerisk at skjæringspunktene mellom grafen og linja gjennom grafens vendepunkter, definerer intervaller som forholder seg til hverandre lik det gylne snitt. På illustrasjonen nedenfor ser vi et eksempel. Forholdet ST/QS er ganske nær det gylne snitt $\left(\sqrt{5}-1\right)/2 \approx 0{,}61803$.

Svein Haugerudbråten,
Vennesla videregående skole
SvHa1@lsyd.no
Christoph Kirfel, Universitetet i Bergen
christoph.kirfel@mi.uib.no

En naturlig reaksjon var da å se på hvordan dette kunne vises generelt. Matematikkens estetiske appell ligger nemlig ikke først og fremst i enkelteksempler, men i de generelle og ikke minst uventede sammenhengene. For en lærer ville det også være av interesse å se om det her fantes utforminger som kunne presenteres for flinke elever i 2MX/3MX.

Nedenfor følger et forslag til bevis.

Vi antar at vi har en 4. gradsfunksjon $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ som oppfyller følgende krav:

1. Grafen har to vendepunkter Q og S, henholdsvis med x-koordinater x_1 og x_2
2. Den rette linja l, som går gjennom vendepunktene, skjærer grafen i ytterligere to punkter, P og T, henholdsvis med x-koordinater x_3 og x_4.
3. Vi har at $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$.

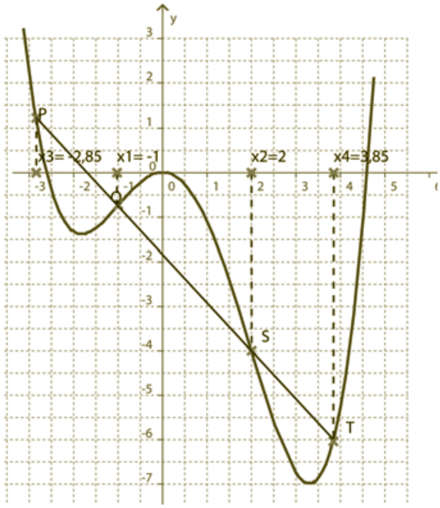
Påstand: $PQ = ST$ og $\dfrac{ST}{QS} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, altså *det gylne snitt*.

Ved å se på formlike trekanter ser vi at dette svarer til:

$$x_1 - x_3 = x_4 - x_2 \text{ og } \frac{x_4 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Først undersøker vi et eksempel. Vi studerer grafen på tegningen. Den tilhører funksjonen $f(x)=\dfrac{x^4-2x^3-12x^2}{12}$. Den andrederiverte blir dermed $f''(x)=x^2-x-2$, som har røttene $x_1=-1$ og $x_2=2$. Dermed får vendepunktene koordinatene $Q=(-1,-3/4)$ og $S=(2,-4)$. Linjen gjennom disse punktene beregner vi slik: $\dfrac{y+3/4}{x+1}=\dfrac{-4+3/4}{2+1}$ som gir $y=\dfrac{-13x-22}{12}$. Vi beregner nå skjæringspunktene mellom kurven og linjen. Det gir oss likningen

$$x^4-2x^3-12x^2+13x+22=0.$$



Her kjenner vi to av røttene: $x_1=-1$ og $x_2=2$.
Vi kan derfor dividere fjerdegradspolynomet på venstre siden av likningen med polynomet $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$. Resultatet blir

$$(x^4-2x^3-12x^2+13x+22):(x^2-x-2)=x^2-x-11$$

Det siste kvadratiske polynomet gir oss *x*- koordinatene til de to nye skjæringspunktene: $x_3=\dfrac{1-3\sqrt{5}}{2}\approx-2{,}85$ og $x_4=\dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}\approx-3{,}85$ og vi ser at $x_1-x_3=x_4-x_2$ og $\dfrac{x_4-x_2}{x_2-x_1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Nå kan vi prøve å finne en forklaring som også gjelder i det generelle tilfellet.

Vi finner først *x*-koordinatene til vendepunktene:

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$$

$$f''(x)=12ax^2+6bx+2c=0$$

Hvis vi kaller røttene i denne siste likningen for x_1 og x_2 så gjelder:

$12a(x-x_1)(x-x_2)=12ax^2+6bx+2c$, og dermed $x_1+x_2=-\dfrac{b}{2a}$ og $x_1x_2=\dfrac{c}{6a}$.

Linja gjennom vendepunktene har likningen: $y=g(x)=kx-kx_1+y_1$ der $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ og $y_1=f(x_1)$ og $y_2=f(x_2)$.

Skjæringspunktene mellom kurven og linjen *l* er gitt ved $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$ som gir:

I: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e-kx+kx_1-y_1=0 \quad\Leftrightarrow\quad ax^4+bx^3+cx^2+(d-k)x+(kx_1-y_1+e)=0$

Siden x_1 og x_2 er røtter i likning I kan denne også skrives slik:

$$a(x^2+mx+n)(x-x_1)(x-x_2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad a(x^2+mx+n)(x^2+\frac{bx}{2a}+\frac{c}{6a})=0$$

II: $\Updownarrow$

$$ax^4+(am+\frac{b}{2})x^3+(an+\frac{mb}{2}+\frac{c}{6})x^2+(\frac{cm}{6}+\frac{nb}{2})x+\frac{cn}{6}=0$$

For å bestemme *m* og *n*, er det tilstrekkelig å sette koeffisientene i 3.- og 2. gradsleddene fra I og II lik hverandre. Dette gir to nye likninger. Vi løser den ene med hensyn på *m*. Uttrykket for *m* settes inn i den andre likningen som løses med hensyn på *n*.

III: $am+\frac{b}{2}=b \Leftrightarrow m=\frac{b}{2a}$ og IV: $an+\frac{mb}{2}+\frac{c}{6}=c \quad \Leftrightarrow \quad n=\frac{5c}{6a}-\frac{b^2}{4a^2}=\frac{10ac-3b^2}{12a^2}$

Røttene i likningen $x^2+mx+n=0$ kaller vi for x_3 og x_4. Da gjelder $x^2+mx+n=(x-x_3)(x-x_4)$ og vi har $x_3+x_4=-m=-\frac{b}{2a}$ og $x_3x_4=n=\frac{10ac-3b^2}{12a^2}$.

Nå har vi at

$$(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_1x_2=\frac{b^2}{4a^2}-4\frac{c}{6a}=\frac{3b^2-8ac}{12a^2}=\frac{9b^2-24ac}{36a^2}, \text{ altså } x_2-x_1=\frac{\sqrt{9b^2-24ac}}{6a}.$$

Tilsvarende får vi at

$$(x_4-x_3)^2=(x_4+x_3)^2-4x_4x_3=\frac{b^2}{4a^2}-4\frac{10ac-3b^2}{12a^2}=5\frac{3b^2-8ac}{12a^2} \text{ altså } x_4-x_3=\sqrt{5}(x_2-x_1). \text{ Nå er}$$

$$x_1-x_3=\frac{(x_1-x_2)+(x_1+x_2)-(x_3+x_4)-(x_3-x_4)}{2}$$

$$=\frac{-(x_2-x_1)-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}+\sqrt{5}(x_2-x_1)}{2}=(x_2-x_1)\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ og}$$

$$x_4-x_2=\frac{(x_4-x_3)+(x_4+x_3)-(x_2+x_1)-(x_2-x_1)}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}(x_2-x_1)-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}-(x_2-x_1)}{2}=(x_2-x_1)\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Dette gir: $x_1-x_3=x_4-x_2$ og $\frac{x_4-x_2}{x_2-x_1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ Altså har vi: $PQ=ST$ og $\frac{ST}{QS}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ som er *det gylne snitt* og påstanden vår er bevist.

Alternativt kan man beregne verdiene

$$x_1 = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 24ac}}{12a}$$

$$x_2 = \frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 24ac}}{12a}$$

$$x_3 = \frac{-3b - \sqrt{5}\sqrt{9b^2 - 24ac}}{12a}$$

$$x_4 = \frac{-3b + \sqrt{5}\sqrt{9b^2 - 24ac}}{12a}$$

direkte, og bekrefte sammenhengen mellom avstandene derfra.

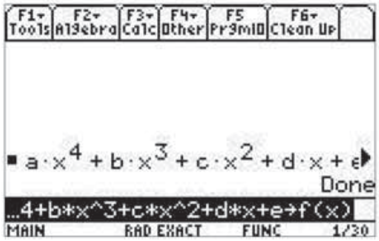
Bemerkning. Det er overraskende å se at *x*-koordinatene til alle skjæringspunktene med linjen – ikke bare *x*-koordinatene til vendepunktene – er uavhengige av parametrene *d* og *e* i fjerdegradskurven.

Løsning på kalkulator med CAS

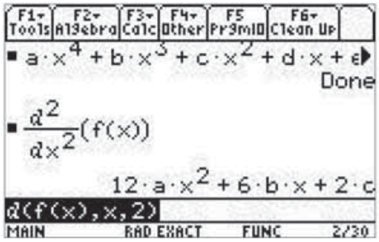
På matematikksenterets novemberkonferanse i Trondheim 2005 hadde Bengt Åhlander et innlegg ”Bättre förståelse i matematik-undervisningen med symbol-hanterande verktyg,” (se www.matematikksenteret.no/content.ap?thisId=302). På dette foredraget foreslår han å bruke en symbolbehandlende kalkulator for å arbeide med det nevnte problemet på fjerdegradskurver. På den måten kan en få hjelp til en del av det hodearbeidet de algebraiske omformingene krever, samtidig som kalkulatoren kommer frem til det samme pene resultatet.

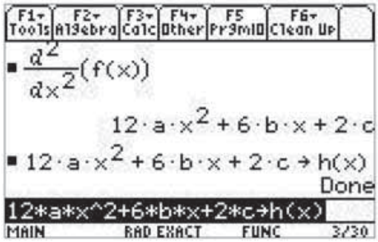
Fremgangsmåten er illustrert ved en TI-89, men kan trolig gjennomgås med alle kalkulatorer som har en innebygd CAS-del. Her vil det være nødvendig å gå trinnvis til verks.

1. Først definerer vi funksjonen $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

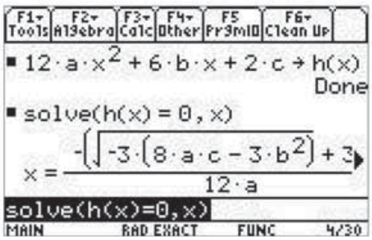


2. Så deriverer vi $f(x)$ to ganger ved å bruke kommandoen ”Differentiate”. Uttrykket vi får, den andrederiverte, kaller vi for $h(x)$.

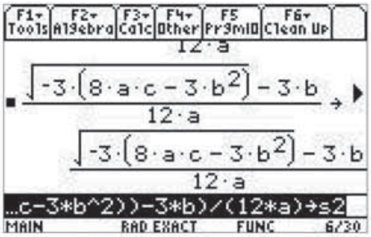




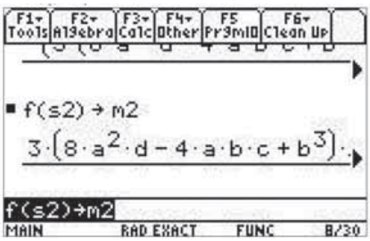
3. Sett $h(x) = 0$ og bestem røttene ved å bruke kommandoen ”Solve”.



4. Kall løsningene for s_1 og s_2 .

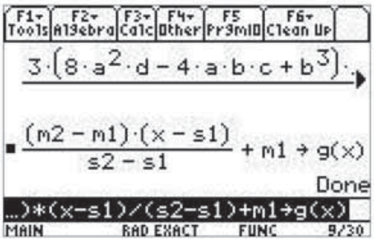


5. Finn de tilhørende y-verdiene på kurven $f(x)$ og kall dem for m_1 og m_2, altså $f(s_1)=m_1$ og $f(s_2)=m_2$.

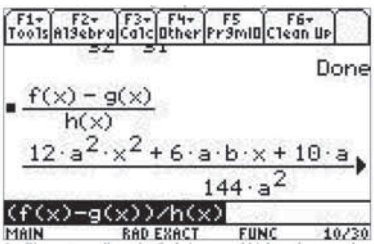


6. Definer linjen gjennom vendepunktene

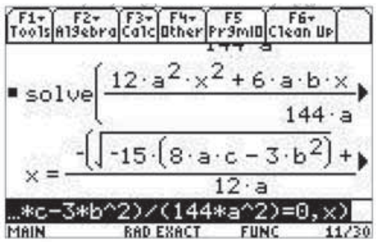
$$g(x)=\frac{m_2-m_1}{s_2-s_1}(x-s_1)+m_1 .$$



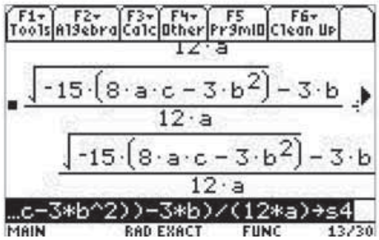
7. Divider $f(x)-g(x)$ med $h(x)$. Her er det nok å bruke en vanlig delingsstrek. Kalkulatoren forstår at det dreier seg om polynomdivisjon.



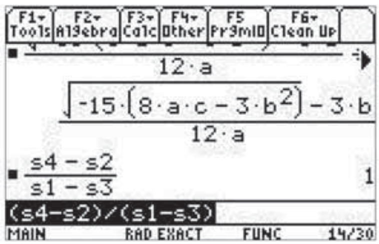
8. Finn røttene til resultatfunksjonen ved hjelp av kommandoen "Solve". Dette er da x-verdiene til de to nye skjæringspunktene mellom linjen g gjennom vendepunktene og utgangskurven f.

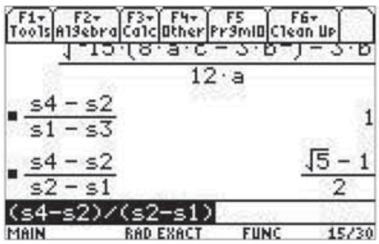


9. Kall dem s_3 og s_4.



10. Beregn forholdene $\frac{s_4-s_2}{s_1-s_3}$ og $\frac{s_4-s_2}{s_2-s_1}$.





Resultatet bekrefter at det første forholdet er 1, mens det andre er *det gylne snitt*!