Øistein Bjørnestad

Litt om å "forstå" regnbuen

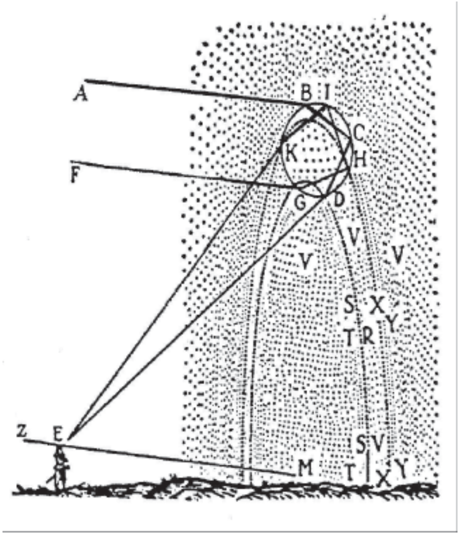
Regnbuen er et påfallende fenomen. I årtusener har en forsøkt å forstå hvordan den kommer i stand. La oss tenke oss en akse fra sola gjennom vårt eget hode. Vi står med ryggen mot sola. I forhold til denne aksen har vi en *hovedregnbue* ved om lag 42° og en atskillig svakere *sekundær regnbue* ved om lag 50°. (En tredje regnbue kan av og til skimtes i retningen *mot* sola.) I området innenfor hovedregnbuen finner vi noen lyssvake bånd, gråhvite, grønne og purpurrøde, de såkalte *overtallige regnbuebånd*. Dette området er forresten lysere enn himmelen ellers, mens området mellom hovedregnbuen og den sekundære regnbuen er mørkere. Det sistnevnte området kalles *Alexanders bånd* etter grekeren Alexander fra Afrodisias.

Hovedregnbuen har et rødt bånd ytterst, deretter ser vi oransje, gult, grønt, blått, og fiolett innerst. For den sekundære regnbuen er det omvendt.

Alt hos Aristoteles finner en tanker om hvordan regnbuen oppstår. Men først omkring år 1300 finner vi vitnesbyrd om *eksperimenter* for å finne ut av disse tingene. Den tyske dominikaneren Dietrich av Freiberg (ca. 1240–ca. 1319) og, omtrent samtidig, perseren Kamal al-Din Abu'l Hasan Muhammad Al-Farisi (ca. 1260–ca. 1320) skal ha gjort eksperimenter med kuleformede glassflasker fylt med vann. De tenkte at disse skulle gjøre det mulig å studere lysets gang i vanndråper (som i regn). Tankene som ble satt fram, gikk ut på at innfallende lys først blir brutt ved overflaten av dråpen, så blir reflektert inne i dråpen, og deretter blir brutt på ny når det forlater dråpen. Glasskarene som ble brukt i eksperimentene, var et kompliserende element. For det foregikk jo også bryting ved overflatene av glasskarene! Mens Al-Farisi var uklar når det gjaldt hvor mange ganger lyset blir reflektert inne i dråpen, mente Dietrich av Freiberg at hovedregnbuen oppstår ved at lyset reflekteres *én* gang, den sekundære regnbuen ved at lyset reflekteres *to* ganger inne i dråpen. (Ting kan tyde på at Dietrich utførte eksperimenter med duggdråper, ikke med glassflasker fylt med vann (se [1]).)

Øistein Bjørnestad
Høgskolen i Sogn og Fjordane
oistein.bjornestad@hisf.no

Etter Dietrichs tid kom det til en dreining i synet på hva som var viktig å forske på, og noe framskritt i studiet av regnbuen kom først århundrer senere. Mange framstillinger av vårt emne framhever – noen mener med urette – René Descartes (1596–1650) arbeid som en milepel. Se figur 1, som viser en tegning fra Descartes *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie qui sont les essais de cette méthode (1637)*. Descartes



Figur 1

må ha tenkt at sola er umåtelig langt borte, slik at solstråler er parallelle. Dietrich hadde tenkt langs aristoteliske baner. På tegningene hans sprer solstrålene seg ut fra et punkt. Dietrichs teori om regnbuen ble trukket fram igjen tidlig på 1600-tallet, av Marco Antonio de Dominis. Den noe yngre Descartes (1596–1650) kom under vær med denne teorien. I motsetning til Dietrich var Descartes fortrolig med loven for brytning av lys i grenseskiktet mellom to stoffer av forskjellig brytningsindeks, som det heter. Den korrekte teorien for slik brytning ble lagt fram av nederlenderen Willebrord Snell i 1621. Descartes *Discours de la méthode* kom i 1637. Da var Snell død, og Descartes fant ingen grunn til å nevne Snell. Franskmennene omtaler til denne dag Snells lov som Descartes lov. Descartes la forresten fram et "bevis" for denne loven som var grunnleggende feilaktig (som nesten samtlige av hans forklaringer av fysiske forhold). Korrekt ble denne loven først forklart av Christiaan Huyghens og Pierre de Fermat.

Videre framgang i teorien for regnbuen kom med Newtons *Opticks* av 1704. Her legger Newton fram sin teori for lysbryting og fargespredning (dispersjon). George Biddell Airy (1801–92) redegjorde for hvordan utseendet av regnbuen endrer seg med størrelsen på vanndråpene. Utover på 1900-tallet kom nye bidrag til forklaringen av regnbuen.

Etter disse historiske glimtene tar vi nå for oss noen få trekk ved regnbuen som vi kan si litt om ut fra elementære kunnskaper i geometri og trigonometri og litt fortrolighet med regneark.

Hovedregnbuen

Lys fra sola inneholder stråling av mange bølgelengder – fra ca. 0,000390 mm (fiolett lys) til ca. 0,000750 mm (rødt lys). Prismer, vanndråper, o.l. viser fargespredning (dispersjon): de er i stand til å skille bølgelengdene og dermed fargene fra hverandre. Det har seg nemlig slik at når lys treffer grenseflaten mellom to ulike stoffer, som luft og vann, så endrer lyset retning. Det blir *brutt*. Og lys av ulik bølgelengde brytes ikke like mye – rødt minst, fiolett mest.

En tenker seg som sagt at regnbuen kommer fram ved at lys fra sola blir brutt og reflektert i vanndråper. På figur 2 tenker vi oss at det kommer lys horisontalt inn mot en vanndråpe (sent om kvelden når sola står lavt!).

Innfallsvinkelen er a, den måles i forhold til normalen på kuleflaten der lysstrålen treffer vanndråpen.

Når lys treffer en overflate som danner grense til et annet stoff, blir lyset *brutt*. Når lyset går fra luft til vann, er *brytningsvinkelen* b mindre enn innfallsvinkelen a. Når lyset går fra vann til luft, er det omvendt.

På figuren har vi bare tegnet lys som blir brutt inn i vanndråpen ved A, reflektert fra veggen av dråpen ved B og brutt ut av dråpen ved D i retning av observatøren ved O. – Noe lys blir reflektert ved A, noe blir brutt ut av vanndråpen ved B og noe blir reflektert ved D. Dette er vi ikke interessert i her, og vi har sett bort fra det.

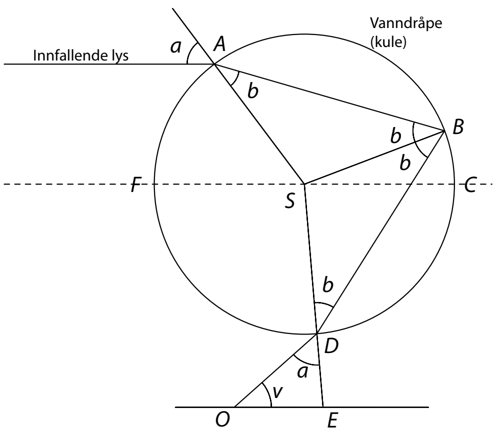
Vi studerer nå figur 2. Brytningsvinkelen b står fire steder. Det har å gjøre med at trekantene ABS og BDS er likebente og kongruente. Dermed finner vi vinkelen a både ved A og ved D (forklar selv).

Merk: Ved bryting følger lysstrålen Snells lov:

$$n_a \cdot \sin a = n_b \cdot \sin b.$$

n_a og n_b er de såkalte *brytningsindeksene* for de respektive stoffene. Her skal vi regne med at $n_a = 1$ (luft) og $n_b = 1{,}32998$ (vann, rødt lys med bølgelengde 0,000750 mm). Brytningsindekser for forskjellig stoffer og ved forskjellige bølgelengder kan en finne på internett (se f. eks. [2])

Radien i vanndråpen kaller vi r. Vi skal regne med at lysstrålen kommer inn mot dråpen horisontalt, parallelt med den stiplede linjen gjennom sentret av vanndråpen og i avstand 0,8624 r fra denne. (Grunnen til tallet 0,8624 forklarer vi nedenfor.)



Figur 2

– Innfallsvinkelen a er ca. 59,59°:

$$\sin a = \sin \angle ASF = \frac{0{,}8624r}{r} = 0{,}8624,$$

(Bruk $\sin^{-1}$-tasten på lommeregneren.)

– Brytningsvinkelen b er ca. 40,42°. Snells lov:

$$n_a \cdot \sin a = n_b \cdot \sin b,$$

$$\sin b = \frac{n_a \cdot \sin a}{n_b} \approx \frac{1 \cdot 0{,}8624}{1{,}32998} \approx 0{,}6484,$$

$$b \approx 40{,}42°$$

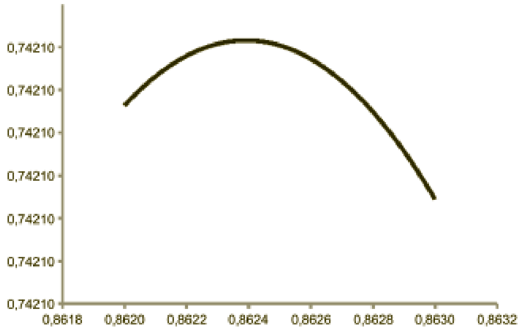
– Vinkelen v er ca. 42,50°:
$\angle ASB = 180° - 2b = \angle DSB,$
$\angle BSC = 180° - \angle ASF - \angle ASB = 2b - a,$
$\angle DSC = \angle DSB - \angle BSC = 180° + a - 4b,$
$\angle DEO = \angle DSC,$
$v = 180° - a - \angle DEO = 4b - 2a$
$\approx 4 \cdot 40{,}42° - 2 \cdot 59{,}59° = 42{,}50°$

– Litt om hvorfor vi valgte avstanden mellom lysstrålen og den stiplede linjen gjennom sentrum av sirkelen på figur 2 lik 0,8624 r: Dersom vi setter nevnte avstand lik kr, og gjennomfører regningen som ovenfor, får vi

$$v = 4 \cdot \sin^{-1} \frac{k}{1{,}32998} - 2 \cdot \sin^{-1} k.$$

($\sin^{-1} x$ er den vinkelen som har sinus lik x.) Vi ser at v er en funksjon av k. Det er en smal sak, også for elever i ungdomsskolen, å finne ut av hvordan v varierer med k. I regnearket Excel lager en seg en tabell over verdier av k og tilhørende verdier av v, og fremstiller disse dataene i et diagram. (Funksjonen $\sin^{-1}$ heter i Excel ARCSIN.) Resultatet vil bli omtrent som på figur 3. Vi ser at v vokser når k vokser, er maksimal for k nær 0,8624, og avtar så når k vokser videre.

Nå har det seg slik at lys som treffer dråpen slik at v blir maksimal, også kaster mest lys tilbake mot observatøren ved O! (Det får bare stå som en påstand.) Når vinkelen v minker mot 0, vil den "delen" av lyset som blir sendt tilbake mot O minke kraftig. Vi vil da vente at for eksempel det røde båndet i hovedregnbuen vil være kraftigst rødt ved om lag 42,50°, svakere etter hvert som vinkelen avtar. Ved å gjennomføre en regning som den ovenfor med brytningsindeksen $n_b = 1{,}34504$ for den korteste bølgelengden i den synlige delen av spekteret (0,000390 mm, fiolett lys), vil regningene tyde på at vi har et fiolett bånd som er kraftig ved ca. 40,36° og ganske raskt blir svakere ved mindre vinkler. (Vi må da bruke $k \approx 0{,}8546$ av tilsvarende grunner som vi brukte $k \approx 0{,}8624$ for rødt lys med bølgelengde 0,000750 mm.)



Figur 3

Vi har bare tatt for oss to bølgelengder, ytterpunktene i den synlige delen av spekteret. Selvsagt bidrar også bølgelengdene mellom disse to til regnbuen. De forskjellige bidragene "legges oppå hverandre" i en viss forstand, og tingene blir kompliserte.

Den sekundære regnbuen

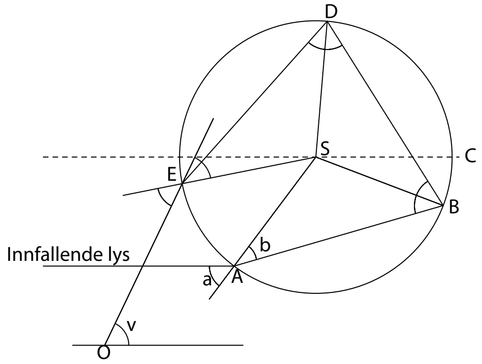
Lysstrålen i figur 4 går inn i dråpen ved *A*, reflekteres ved *B* og ved *D*, forlater dråpen ved *E*, og når observatøren ved *O*. Linjen fra venstre mot høyre gjennom *O* er parallell med den stiplede linjen gjennom *S*. Vi har lagt inn en hjelpelinje, en forlengelse av *OE*, for den som vil prøve å finne et uttrykk for *v* ut fra figuren. Vinkelen *b* finnes seks steder på figuren (trekantene *ABS*, *BDS* og *DES* er likebente og kongruente). Et resonnement omtrent som det for figur 2 gir oss at

$$v = 180° + 2a - 6b.$$

Setter vi igjen avstanden mellom den innfallende lysstrålen og aksen gjennom *S* lik *kr*, får vi for rødt lys

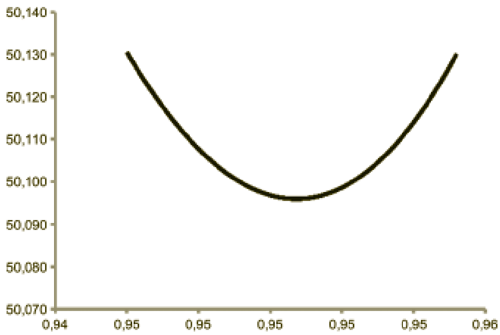
$$v = 180° + 2 \cdot \sin^{-1} k - 6 \cdot \sin^{-1} \frac{k}{1{,}32998}.$$

Går vi fram på samme måte som ovenfor, finner vi at funksjonen *v* av *k* avtar mot et minimum ved $k \approx 0{,}9507$. Med denne verdien av *k* får vi



Figur 4

$v \approx 50{,}10°$. Se figur 5. Det røde båndet i den sekundære regnbuen befinner seg fra denne vinkelen og litt utover. For det fiolette båndet finner vi å måtte bruke $k \approx 0{,}9481$, og får $v \approx 54{,}00°$. Det fiolette båndet starter ved denne vinkelen og går litt utover.



Figur 5

Referanser

[1] Cohnitz, Daniel (2003): Ray of Light? Dietrich von Freiberg und die Geschichte von der mittelalterlichen Wissenschaft. *Studia Humaniora Tartuensia*, 4.B.1. Tilgjengelig fra http://www.ut.ee/klassik/sht/. [Lastet ned 05.07.2006].

[2] *Luxpop Index of refraction values and photonics calculations*. Tilgjengelig fra http://www.luxpop.com. [Lastet ned 06.07.2006].