Øistein Gjøvik

Pytagoras, Pizza og PC

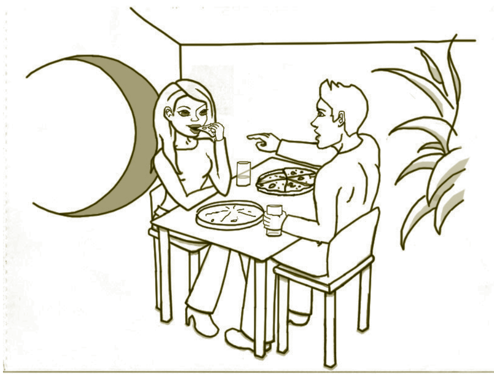
"Skal vi bestille en stor eller to små? Eller kanskje en medium og en liten?"

Magnus har helt klart tenkt seg å få mest for pengene.

"Kan du regne ut hvor stor forskjellen er?", sier Andrea.

"Nei, det står ikke *hvor* store de er. Før var det vel diametre på 30 og 40 cm som var alternativene, men nå vet jeg ikke lenger. Dessuten er det jo tre størrelser nå. Hva skal vi velge?"

Andrea og Magnus er skrubbsultne og bestemmer seg for å bestille en av hver størrelse. Dette skal de til bunns i.



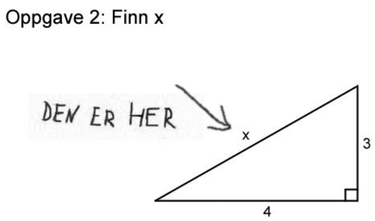
Øistein Gjøvik, Høgskolen i Sør-Trøndelag
oistein.gjovik@alt.hist.no

Ja, hvordan skal man egentlig finne ut hva som har størst areal? En medium og en liten pizza, eller en stor? Eller hva er det lurest å velge, to små eller en stor? For å kunne si noe om hva som gir mest for pengene, må vi iallfall kunne sammenlikne arealene. I denne artikkelen skal vi starte med Pytagorassetningen og se hvordan den gir oss nye kilder til en matematisk oppdagelsesferd. Pytagorassetningen blir også kalt Pytagoras' teorem, den Pytagoreiske læresetningen eller Pytagoras' grunnsetning, og den er et sentralt begrep i grunnskolens geometri. Den har sin plass i Kunnskapsløftet både for tiende trinn og Vg1P [1].

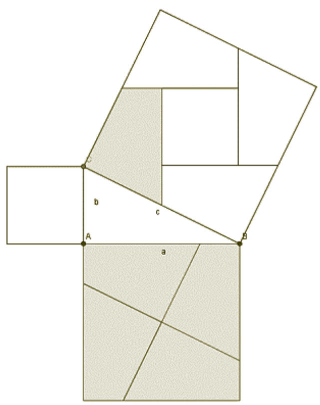
Det fins såpass mange beviser for setningen at det er vanskelig å gi en komplett oversikt. På nettreferanse [2] finner du faktisk (i skrivende stund) hele 69 (mer eller mindre tilgjengelige) bevis for setningen, og den oppdateres stadig med nye. Gila Hanna har funnet nærmere 370 bevis for setningen. Sikkert er det at setningen gir grobunn til en mengde av sammenhenger som kan være interessante å undersøke. Det blir noen korte avstikkere underveis, blant annet et lite opphold hos Napoleon.

Demonstrasjoner

Lenge gikk følgende bilde rundt på e-poster i hele verden:



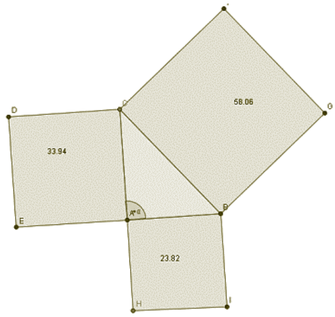
Selv om bildet er ment som en spøk, forteller det oss noe om meningsløsheten enkelte finner i ren algoritmisk bruk av Pytagorassetningen. Hadde denne eleven forstått at Pytagorassetningen dreier seg om kvadrater på sidene i rettvinklede trekanter, hadde vedkommende kanskje kunnet svare på oppgaven. En måte å innføre Pytagorassetningen på, er å bruke puslespill. Du kan selv klippe ut et slikt fra nettreferanse [3]. På denne måten drøyer man den algebraiske tankegangen litt. Du kan konstruere ditt eget puslespill med geometrisk programvare, som Cabri [4] eller Geometer's Sketchpad [5]. I denne artikkelen har jeg brukt gratisprogrammet GeoGebra [6]. Eventuelt er GEONExT [7] et annet gratis program som er greit å bruke.



Du kan faktisk også bruke de velkjente Tangrambrikkene [8] til å demonstrere Pytagorassetningen. Se [9] for forslag til undervisningsopplegg.

På Vitensenteret i Trondheim henger en roterende rettvinklet trekant med kvadrater fulle av farget vann på sidene. Ved å rotere trekanten kan man se hvordan vannet renner ut av de to små kvadratene og nøyaktig fyller det store [10].

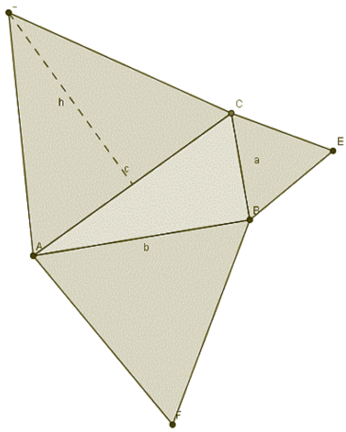
Den kanskje enkleste demonstrasjonen av setningen er rett og slett å regne ut arealene av disse kvadratene, som på figuren under. Dette kan både gi en overbevisning om at setningen forteller oss noe om arealet av kvadratene og ikke bare er meningsløse bokstaver, samt at en slik betraktning kan gi grobunn for en verdifull diskusjon på forskjellen mellom å bevise og å demonstrere. Med dynamisk programvare kan man raskt endre på den opprinnelige trekanten og sjekke om arealregnestykket fortsatt stemmer. Eller man kan endre den rette vinkelen til å bli større og mindre og se hva som skjer med arealene.



Utvidelser

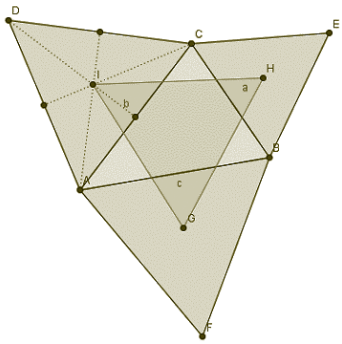
La oss fortsatt se på en rettvinklet trekant, men hva nå om vi bytter ut kvadratene på sidene med likesidete trekanter? (Dette var blant annet en oppgave i Illustrert Vitenskap nr. 6/2000, s. 66). Igjen kan vi bruke dynamisk programvare til både å vise vei og til å gi oss et hett tips om hvorvidt vi fortsatt kan bruke Pytagorassetningen. Men vi må likevel gi et *argument* for å være helt sikre!

La oss først regne ut arealet av trekanten på siden c, altså ΔACD. Siden trekantene på sidene av ABC er likesidede, må høyden i en slik dele den i to trekanter med vinkler på 30, 60 og 90 grader. Høyden i ΔACD finner vi ved likninga

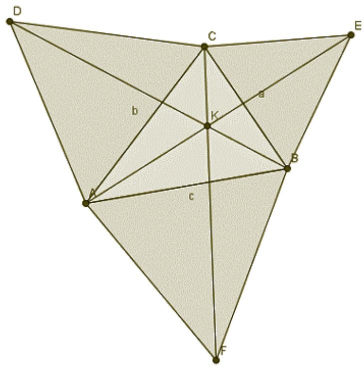


$\left(\frac{1}{2}c\right)^2 + h^2 = c^2$, og da blir $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Arealet blir da $\frac{c \cdot h}{2} = \frac{c \cdot c\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Tilsvarende blir arealene på sidene b og a henholdsvis $\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$ og $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Vi vet nå fra før at $a^2 + b^2 = c^2$ og da må også $\frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Vi ser at Pytagorassetningen også gjelder med likesidete trekanter på sidene. Den opprinnelige Pytagorassetningen gjelder også den andre veien, slik at hvis $a^2 + b^2 = c^2$, så er ΔABC rettvinklet. Slik må det også være når vi har likesidete trekanter på sidene.

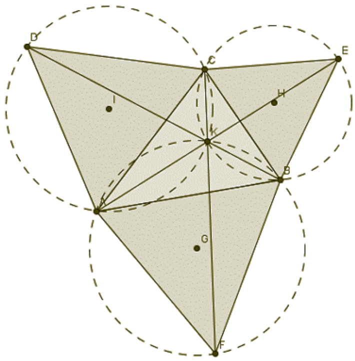
Hva om det er andre typer trekanter på sidene? Prøv! Pytagoras har altså allerede gitt oss en ting vi kan utforske videre. Mens vi nå har de likesidete trekantene der kan vi begi oss ut på et interessant sidespor. Tyngdepunktet i en trekant er der de tre høydene møtes. Tyngdepunktene i de tre likesidete trekantene kan forbindes for å skape en ny trekant. Pussig nok vil denne nye trekanten også bli likesidet *uansett om den opprinnelige ABC er rettvinklet eller ikke*. På figuren nedenfor ser du skjæringspunktet I mellom høydene i ΔACD gi oss ett av de tre tyngdepunktene. Sammen med de to andre tyngdepunktene, H og G, får vi hjørnene i en ny likesidet trekant GHI. Dette er det såkalte *Napoleons teorem* [11], og du kan finne en del informasjon om og bevis for dette teoremet på [12]. I likhet med Pytagorassetningen er det lite som tyder på at det virkelig var personen som ga navn til setningen som faktisk oppdaget den. Vi vet riktignok at Napoleon var rimelig flink i matematikk.



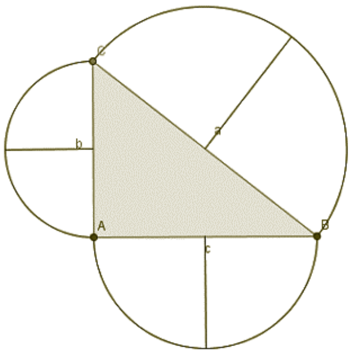
Slik kan vi fortsette å finne sammenhenger. Forbinder vi de hjørnene som er lengst borte fra den opprinnelige trekanten ΔABC (altså hjørnene D, E og F), med det motsatte hjørne i den opprinnelige trekanten (henholdsvis B, A og C) vil alle disse linjene skjære hverandre i ett og samme punkt K. Dette er et av flere punkter som "kjemper" om tittelen *sentrum i trekanten*. (For andre kandidater, se for eksempel [13].



En av grunnene til at dette punktet i noen sammenhenger blir brukt som "sentrum" i ΔABC er at også de tre likesidete trekantenes omskrevne sirkler skjærer hverandre i det samme punktet.



Det er nesten ikke grenser for hvor mye man kan begi seg ut på med Pytagoras i hodet og en PC på pulten. Vi kan kanskje undres på om vi kan bruke dette i praksis? (Og et annet spørsmål – er det nøye? Et spørsmål som kan gi interessante diskusjoner om matematikkfagets egenart!) Vi har allerede vist hvordan Pytagorassetningen også gjelder når vi har med likesidete trekanter å gjøre. Hva om vi har andre former, som for eksempel sirkler eller halvsirkler? I så fall kan det jo hende våre pizzaspisende venner kunne anvende dette.



Arealet av en halvsirkel med radius r er $\pi r^2/2$. Skal arealene da være like må følgende gjelde:

$$\frac{\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{2}+\frac{\pi\left(\frac{1}{2}b\right)^2}{2}=\frac{\pi\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{2}$$

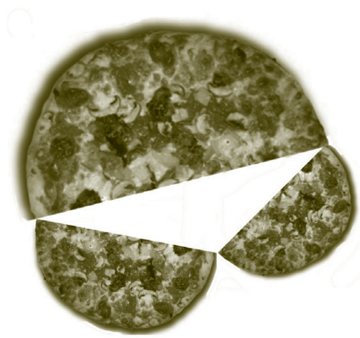
der a, b og c er sidene i ΔABC. Ganger vi med $8/\pi$ på begge sider, vil vi igjen stå igjen med $a^2 + b^2 = c^2$, noe vi vet stemmer for rettvinklede trekanter. Pytagorassetningen må altså også gjelde om vi regner med halvsirkler. Det vil si, arealet av de to minste halvsirklene er likt arealet til den største halvsirkelen hvis og bare hvis trekanten er rettvinklet.

Tilbake til pizzaproblemet

"Hadde vi enda hatt pizzaeskene, kunne vi brukt Pytagorassetningen. De er jo kvadratiske!", utbryter Andrea.

"Men nå vet vi jo at den samme setningen også gjelder for halvsirkler."

Magnus tar pizzakniven og skjærer de tre pizzaene tvers over gjennom sentrum. Han legger dem inntil hverandre, hjørne mot hjørne.



Vi kan altså si om det er mest på en stor eller en liten + medium ved å kutte de i to og legge de inntil hverandre som på tegningen. Blir det en rett vinkel mellom de to minste vet vi at den store er like stor som de to andre til sammen. Hva hvis vi ikke får en rett vinkel? Her kan vi igjen bruke dynamisk programvare til å eksperimentere litt. Vi skjønner kanskje at hvis vinkelen mellom de to minste er større enn 90°, så er den store pizzaen størst, og hvis vinkelen er mindre enn 90°, er de to små størst (hvorfor?).

Kan vi være sikker?

Det går an å vise at Pytagorassetningen stemmer uansett hvilke figurer man setter på sidene, bare de er formlike. Det trenger ikke en gang å være polygoner eller enkle figurer. La oss si at den rette vinkelen er mellom katetene a og b, og hypotenusen er c. Arealet av figuren på side a kaller vi A, og tilsvarende er arealene på de andre sidene B og C. Siden vi har en rettvinklet trekant gjelder Pytagorassetningen, $a^2 + b^2 = c^2$.

Forholdet mellom b og a er b/a. Det vil si at side b er endret med en faktor b/a i forhold til a. (Dette er en annen måte å si at $b = \frac{b}{a} \cdot a$ på.) Vi vet at en lineær forstørrelsesfaktor på f gir en forstørrelse på f^2 på arealene. Da er arealet B forstørret med en faktor $(b/a)^2$ i forhold til arealet A. Altså er $B = (b/a)^2 A$. Dette gjelder også for siden c, der $C = (c/a)^2 A$. Vi skal vise at $A + B = C$. Nå er

$$
\begin{aligned}
A + B &= A + \left(\frac{b}{a}\right)^2 A \\
&= A \cdot \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) = A\left(\frac{1}{a^2}\left(a^2 + b^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

Siden dette er en rettvinklet trekant, gjelder Pytagorassetningen og vi får da videre at $A + B = A(c^2/a^2) = C$.

Altså gjelder Pytagorassetningen også for andre former enn rettvinklete trekanter når vi har formlike figurer på sidene.

Du kan lese mer om Pytagoras og hans sekt på [14] og finne et klassisk bevis hos Euklid (Proposisjon 47, bok 1) på [15]. Du kan også se på [16] for et visuelt bevis for Pytagorassetningen med GeoGebra.

Referanser

[1] Kunnskapsløftet - Læreplaner for gjennomgående fag i grunnskolen og videregående opplæring. Læreplaner for grunnskolen. Midlertidig trykt utgave - september 2005

[2] Mange bevis for Pytagorassetningen: www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

[3] To klippebevis: www.aris.com.au/numeracy/Pythagoras/twopythagoras.html

[4] Cabri Geometry: education.ti.com/educationportal/sites/US/productDetail/us_cabri_geometry.html

[5] Geometer's sketchpad: www.keypress.com/x5521.xml

[6] GeoGebra: www.geogebra.at

[7] GEONExT: geonext.uni-bayreuth.de/

[8] Tangrambrikker kan kjøpes i bokhandler, eller (fraktfritt) fra www.play.com. Eller skriv ut dine egne her: nordnorsk.vitensenter.no/Skole/tangram.htm

[9] www.matematikk.org/artikkel/uopplegg/vis.html?id=99

[10] www.viten.ntnu.no/modeller/mod151.pdf

[11] Napoleons teorem: mathworld.wolfram.com/NapoleonsTheorem.html

[12] Mer om Napoleons teorem: www.mathpages.com/home/kmath270/kmath270.htm

[13] Higgins, P.M. (2002), Mathematics for the imagination, s.82

[14] Pytagoras og hans sekt: www.anselm.edu/homepage/dbanach/pyth1.htm

[15] Bevis for Pytagorassetningen hos Euklid: aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI47.html

[16] Pytagoras på GeoGebra: www.geogebra.at/en/examples/pythagoras/pythagoras.html