Kurt Klungland

Tetraedere og kuber i gangetabellen

Hvordan det hele begynte? Det husker jeg ikke. Tankene har bare kommet etter hvert som jeg har syslet med objektene, syslet både med hodet og med hendene.

Det følgende kan leses som en matematisk tekst, men mest av alt er det 'en advarsel' om hvor tankene kan havne hvis de får kretse fritt og uhemmet. De behøver ikke bare gå rundt, de kan også havne i trekanter og firkanter, og dimensjoner er ingen hindring.

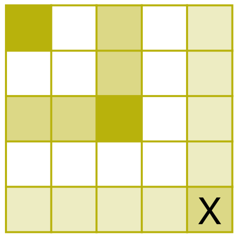
Vi starter enkelt, med …

Kvadrattall og oddetall

Jeg er glad i tall, særlig figurtall. Ser de for meg. Kvadrattallene for eksempel. De ligger der på rekke og rad og vokser med oddetallene. Selvfølgelig vokser de med oddetallene, ettersom du legger til ei rad på to av sidene (partall) og så legger du en 'brikke' i hjørnet for at det skal bli et nytt kvadrat. Som i figur 1: $16 + 4 + 4 + 1 = 25$.

$5 \cdot 5 = 25$. Og 25 ligger greit plassert på gangetabellen, langs en, ja i grunnen langs den eneste diagonalen (Figur 2). («Allting har en ende, et tau har jammen to» – men rekka av naturlige tall har bare én ende – det første tallet, 1. Likedan har et rektangel fire sider, men gangetabellen bare to, nemlig de to linjene av naturlige hele tall som står normalt på hverandre.)

På tvers av kvadrattallene er det noe interessant: $6 \cdot 4$ er 24, altså 1 mindre enn 25, og $7 \cdot 3$ er 21, 3 mindre enn 24 og 4 mindre enn 25. Slik



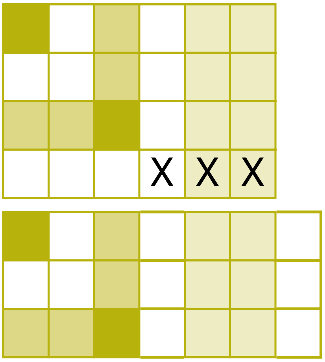
Figur 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figur 2

Kurt Klungland underviser ved Samfundets skole i Egersund. Han er også ressursperson for Nasjonalt senter.
kurtmik@online.no

fortsetter det i begge retninger bort fra kvadrattallene. Og i disse differensene finner vi igjen oddetallene og kvadrattallene (Figur 3).



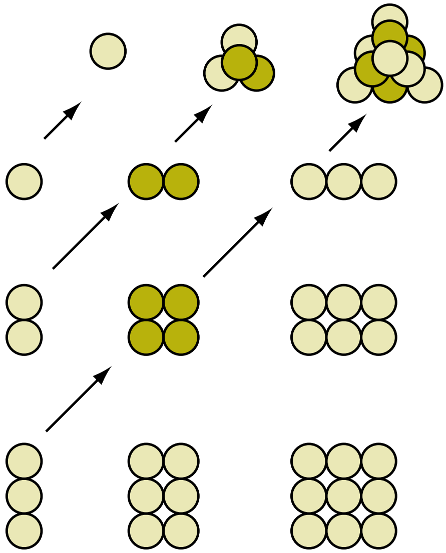
Figur 3

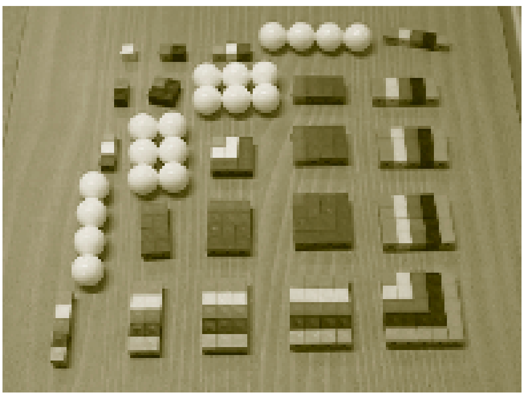
I rekka 25, 24, 21, 16, 9 minker tallene med oddetallene. Ovenfor har jeg prøvd å vise dette med rektangler. Det kan også beskrives med 'rektangel-setningen' $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, eller med ord omtrent slik: *Når vi starter med et kvadrat og øker den ene sida med like mye som vi reduserer den andre, blir det nye rektanglet redusert med kvadratet av endringen.*

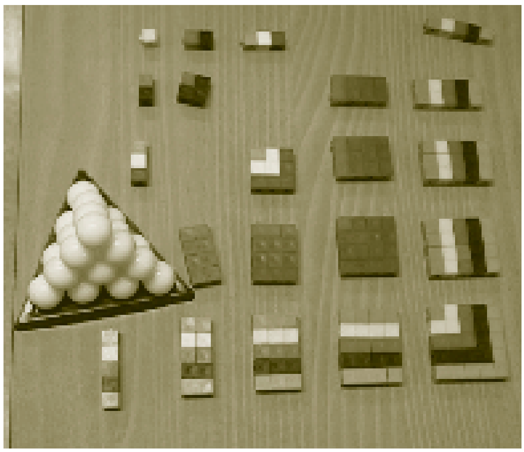
Tetraedere av 'tallene på tvers'

Nok om det. Når en går og tenker på slike skrålinjer, så kommer jo tankene inn på andre parallelle linjer, og da ikke bare de som står normalt på kvadrattallene, men også de som ligger mellom disse skrålinjene. En av disse er markert i gangetabellen i figur 2, nemlig linja 4, 6, 6 og 4.

Og den er jo interessant. Er ikke det antall kuler i det puslespillet jeg kjøpte på Vitensenteret i fjor? Det som gikk ut på å lage et tetraeder av fire brikker: to med 4 kuler på rad, og to med 2·3 kuler? Jo, så sannelig. Og ikke bare det, men *alle linjer* som går normalt på hoved-diagonalen i gangetabellen er brikker i et tetraeder! Og hvilke brikker! Tetraederet er jo en romfigur, en trekanta pyramide, den regulære romfiguren som lages av færrest mulig sider, nemlig 4 likesida trekanter. Og





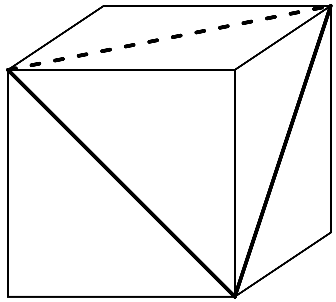


disse 'brikkene' av kuler er flate, plane. Men når de stilles på skrå oppå hverandre (snaut 60°), danner de et tetraeder, slik som du ser på bildet og i tegninga på forrige side.

Fem trekanta pyramider er en kube

Tetraedere i gangetabellen? Jasså. Da må vi gå litt bakover i tida: For et års tid siden satt jeg sammen med 10. klasse og lekte med brikker. Vi skulle forberede oss til eksamen og satt og laget ulike figurer av Polydron.

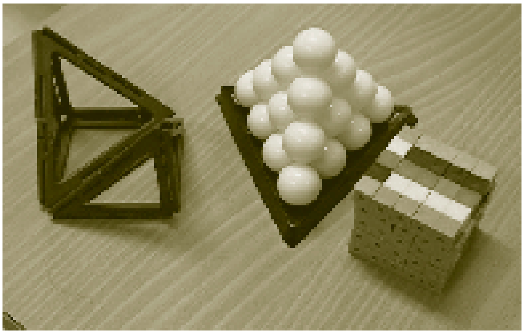
Da kom jeg i hu en oppgave jeg liker godt, en slik 'Aha-oppgave', nemlig: *Hva er vinkelen mellom disse to diagonalene på terningen?*



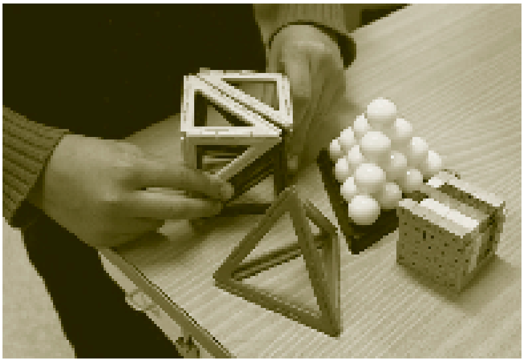
Løsningen er jo elegant: Trekk den tredje diagonalen, og vi har en likesida trekant, med vinkler på 60°.

Trekker vi den tredje diagonalen, får vi en trekanta pyramide som skjærer av en viss del av kuben. Hvor mye? – Jeg laget trekanten, av én likesida og tre rettvinkla trekanter.

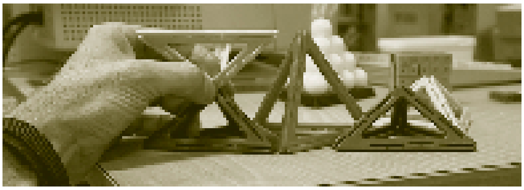
Har du sett på maken? Ja, jeg laget den óg, og da satt jeg der med to likesida trekanter som til sammen dekket bunnen av kuben og som 'strakte seg' opp til to av 'de øverste' hjørnene.



Vel, da så det ut som om jeg trengte to trekanter til, og det stemte. De fire trekanta pyramidene utgjorde til sammen hele kuben. – Men det var et hull i midten? Hvor stort? Jo, innersidene på de fire brikkene var jo likesida trekanter, så jeg laget et tetraeder. Og satte det inni. Som hånd i hanske!



Vel, jeg kunne ikke sitte og holde på pyramidene hele tiden. (Plastbrikkene hadde utglidende tendenser, som da vi i 5. klasse skulle lage Borgund stavkirke i Jovo-brikker og endte opp med utstilling av ruinene på Domkirkeodden på Hamar!) Så jeg satte brikkene fra meg på bordet. Der lå de – i all sin prakt, fire små og en større. – Hvor mye større? To hjørnepyramider oppå hverandre var like høye som tetraederet, og med samme grunnflate ville det jo si at tetraederet var dobbelt så stort som hver av de andre pyramidene, og dermed 1/3 av hele kuben.



Tilfreds med meg sjøl og klassens resultater til eksamen, tok jeg sommerferie, med tetraedere og kuber surrende i bakhodet.

Det skader ikke å kjede seg

Ifølge Jon Haugstad i siste nummer av Tangenten (nr 3, 2003), oppfant Piet Hein et puslespill mens han kjedet seg i en fysikktime.

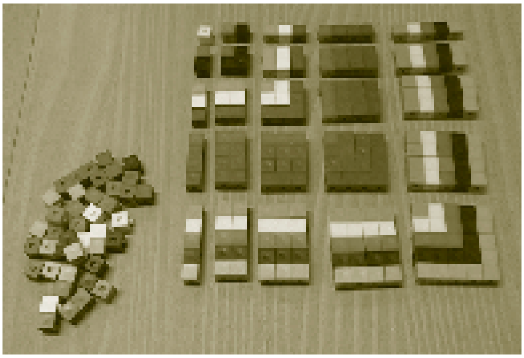
Hva jeg hadde tenkt å høre på, husker jeg naturligvis ikke, men tankene gikk til gangetabellen. Jeg tenkte på hvor mange kuler jeg måtte kjøpe inn for å visualisere *Den lille multiplikasjonstabellen*, eller matematisk sagt: *Hva er summen av alle tallene i alle mulige rektangler fra* 1·1 *til* 10·10*?* Igjen fikk jeg bruk for 'rektangel-setningen', da jeg vanligvis ikke tar med meg kalkulator til foredrag, (ja, ikke noen plass forresten, jeg bruker den innebygde: 'verkstedet').

Sidene i gangetabellen er jo tallene fra 1 til 10, som er 55. Altså er det 55·55 'kuler' i tabellen. 55·55 er jo 5,5·5,5·100 som igjen er (5·6 + 0,25) ·100.

Hvordan skulle jeg få råd til 3025 isoporkuler? Vel, jeg er glad i tall, men de blir alltid så mye vanskeligere straks de kommer i nærheten av **kr**. NOK er NOK, mener nå jeg. Og så fløy tankene videre. (Er det det som kalles den assosiative lov i matematikken?)

Kuber av kuber

Tankene gikk på tvers. I stedet for å gå diagonalt ut fra kvadrattallene, falt tankene på illustrasjonen av kvadrater som sum av oddetall (figur 1). Og dermed laget jeg følgende figur, først i tankene, siden med centikuber (som jo er lettere å fotografere):



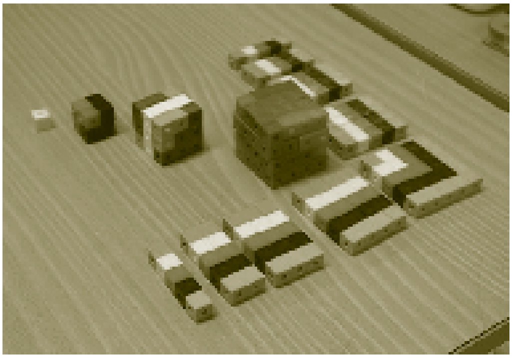
Her ser du centikuber. Pent ordnet på et bord, i alle fall noen av dem. Er dette gangetabellen? Er gangetabellen det første du tenker på når du ser dette? Hvorfor tenker vi bare på gangetabbelen som hundre tall? Hvor ofte har du latt elevene lage denne 'tabellen' med knotter? Jeg hadde heller aldri gjort det før (og vi har foreløpig bare to tusen centikuber på skolen).

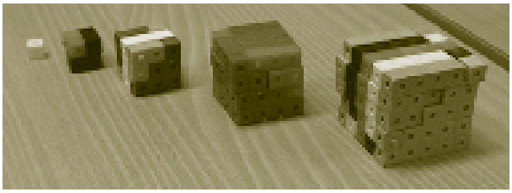
Det du ser ovenfor, er rett og slett den enkleste firedelen av den lille gangetabellen:

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Figur 4

Jeg måtte lage rektanglene av kuber, fordi jeg hadde tenkt å stable dem oppå hverandre. (Det er vanskelig med kuler, hvis en ikke kan stikke pinner mellom dem.) Og her er resultatet av bygginga:





Kvadrattallene utgjør bunnplatene i kubene, og så ligger rektanglene på den ene sida 'i trapp' oppover fra N·(N – 1) til N·1, og rektanglene på den andre sida i ei omvendt trapp, slik at de til sammen utgjør ei kube på N·N·N. Hvilket vil si at 3025 er summen av de 10 første kubikktallene, eller antall brikker i det tiende kubikktårnet, om du vil. Som igjen betyr at kvadratet av de N første trappetallene er summen av de N første kubikktallene.

Summer av trappetall er jo tetraedertallene, men tetraedere av kuler (appelsinhauger) kan også deles på skrå i plane skiver som vi finner igjen som rader i gangetabellen, på tvers av diagonalen med kvadrattallene. Og alt dette ser vi i multiplikasjonstabellen, den tallsamlinga som alle helst bør kunne utenat!

Galskap eller kjennskap?

Men så var det de andre folk da. Hvordan reagerer de på den tallgærne læreren som sitter og pusler med knotter og trekanter?

Det får bli en hemmelighet – kanskje også for meg! – Howard Gardner nevner flere intelligenser enn den romlige.

Men jeg er sikker på at for noen mennesker, heriblant også for noen av de i den store aldersgruppe som kalles elever, vil det være noen som kan trekke generaliseringer på grunnlag av arbeid med slike konkreter – samt en enda større del som kanskje kunne ha fått mindre brist i sjøltilliten sin under innøving av gangetabellen hvis de hadde fått mulighet til bygge og flytte på kuler og knotter. – Skal vi gi dem en sjanse til å bli venn med tallene?