Tove Kalvø

Den deriverte på skråplanet

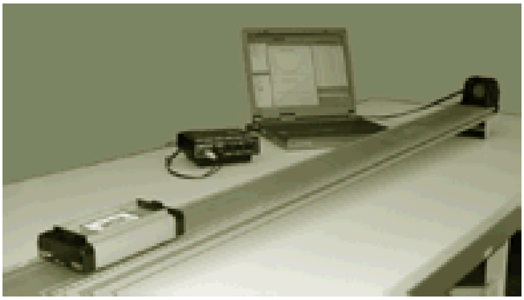
Bruk av datalogger som en praktisk tilnærming til begrepsforståelse av den deriverte.

Det har i den senere tid vært satt søkelys mot bruk av IKT (informasjon- og kommunikasjonsteknologi) i undervisningen, og matematikkundervisningen spesielt. Selv skrev jeg våren 2002 en hovedoppgave der jeg så på integreringen av et teknologisk hjelpemiddel i matematikkundervisningen. I den sammenhengen tok jeg for meg datalogger som verktøy i begrepsforståelsen av den deriverte. I denne artikkelen vil jeg derfor se på noen av de mulighetene et slik verktøy gir for metodisk variasjon innen matematikkundervisningen.

Utstyr

Det finnes flere ulike typer av dataloggere på markedet i dag. Felles for dem er imidlertid at de kan samle data fra ulike forsøk elevene utfører, for deretter å framstille dette i et

Tove Kalvø arbeider som lektor ved Hovin skole, Oslo (ungdomsskole). Hun er fagrettleder og koordinator på skolen i realfag, og leder for en nettverksgruppe i matematikk på 12 skoler i Oslo-området.
Tove.Kalvo@hovin.gs.oslo.no



Figur 1

dataprogram på en datamaskin. Dataloggeren som verktøy gir rom for store variasjoner av elevaktiviteter, da det er mulig å knytte mange forskjellige sensorer til denne. Ulike sensorer kan være til registrering av temperatur, luftfuktighet, bevegelse, lyd, CO_2 med mer. Jeg vil her beskrive bruken av bevegelsessensoren, som man også kan si fungerer som et ekkolodd. Bevegelsessensoren sender ut lydpulser som treffer et ønsket objekt, lydpulsen blir så reflektert tilbake til sensoren, som da har registrerer tiden en lydpuls bruker. Dermed kan vi få kjennskap til blant annet avstanden til objektet. Bildet i figur 1 viser hvordan et utstyrsoppsett kan se ut.

Til høyre i bildet ser vi bevegelsessensoren/ekkoloddet som er festet øverst på et skråplan. På dette skråplanet kan en vogn, som ses i venstre billedkant, bevege seg. Bevegelsessensoren er videre koblet mot en datamaskin med dataloggingsboksen til venstre for denne. Her brukes dataprogrammet Data Studio til framstilling av de dataene som blir logget. Dette er et vindubasert program med mange muligheter for gode grafiske framstillinger. I tillegg er hjelpefunksjonen god, slik at brukerterskelen er relativt lav. Noe av styrken til dette verktøyet ligger også i muligheten for å kunne presentere svært mange eksempler på kort tid. Elevene kan gjøre mange forsøk og få vist mange ulike grafer som de kan studere. Gjennom den tradisjonelle undervisningen er det ofte ikke tid til å studere så mange eksempler, da mye av tiden går med til den tekniske løsningen av oppgavene. Med bakgrunn i dette vil nok fokuset tradisjonelt kanskje bli tatt bort noe fra selve begrepslæringen. Det påpekes også av forskere (Ferrini-Mundy og Graham, 1994; Aspinwall m. fl., 1997; Villarreal og Borba, 1998) at elevene må få bedre trening i arbeidet med grafiske framstillinger, og at ny teknologi muligens kan bedre disse framstillingene og gjøre begrepsforståelsen enklere. Dette støtter jeg meg til gjennom de erfaringer jeg har med dataloggeren som verktøy, der det helt klart gir positive bidrag metodisk til matematikkundervisningen.

Undervisningen

Det følgende vil dreie seg om hvordan bruk av datalogger kan være en praktisk tilnærming til begrepsforståelsen av den deriverte. De fleste som underviser matematikk i videregående skole har erfart at elevene har problemer med begrepsforståelse av den deriverte, dette støttes også av flere forskere (Orton, 1983; Bezuidenhout, 1998; Amit og Vinner, 1990). Noen av problemene er knyttet til begrepene veksthastighet, grenseverdi, sekant, tangent og relasjonen mellom en funksjon og den grafiske framstillingen av denne. Det naturlige spørsmålet blir dermed: Hvordan skal vi som lærere ta tak i dette, og på hvilken måte kan vi legge opp undervisningen slik at elevene får en god begrepsforståelse av den deriverte? Som svar på dette har jeg erfart at bruk av datalogger kan være et hensiktsmessig verktøy, og noen av mine erfaringer kommer til syne videre i artikkelen.

For elevene i 2 klasse på videregående skole, var det den deriverte som sto for tur i lærestoffet. I denne sammenhengen var det at dataloggeren ble trukket inn. Jeg valgte å ikke undervise noe i forkant om den deriverte, men lot elevene få en induktiv tilnærming til lærestoffet gjennom bruk av datalogger. Elevene ble delt i smågrupper på to og tre elever, totalt 12 grupper. De fikk utdelt et arbeidshefte jeg hadde utviklet i forkant, samt at hver gruppe hadde tilgang til dataloggingsutstyret. Arbeidsheftet var utformet slik at elevene kunne jobbe selvstendig i gruppene med dette, mens jeg gikk rundt i klasserommet og veiledet ved behov. Gruppene kunne da arbeide i det tempoet som de følte var hensiktsmessig for å sette seg inn i lærestoffet. Underveis mens elevene jobbet registrerte jeg stor motivasjon og iver blant elevene. Gjennom de praktiske forsøkene elevene utførte, og de framstillingene dette ga i dataprogrammet, kunne jeg overhøre mange interessante faglige diskusjoner elevene imellom. Videre skal vi se på noen av de observasjonene jeg gjorde.

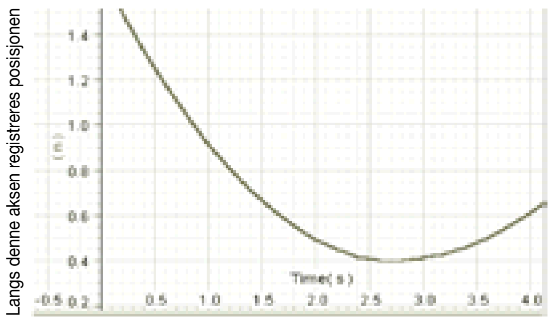
Elevenes arbeid

Gjennom arbeidsheftet elevene jobbet med, var det mange ulike oppgaver elevene skulle løse. Disse oppgavene skulle løses med bakgrunn i forsøk elevene gjorde med dataloggingsutstyret. Elevforsøket gikk ut på å sende vogna opp langs skråplanet mens bevegelsessensoren registrerte data knyttet til vognas bevegelse. Samtidig med vognbevegelsen og registreringen, viste dataprogrammet to grafiske framstillinger av forsøket. En posisjon-tid kurve og en fart-tid kurve. Noe av det som er viktig å legge merke til er at kurvene vises samtidig med at forsøket utføres. Det er altså momentan respons, noe som elevene underveis kommenterte som svært positivt. I tillegg åpner forsøket for en studie av svært små tidsintervaller. Elevene kunne her gjøre beregninger ved hjelp av datamaskinen slik at meget korte tidsintervaller, helt ned i 0,0025 sekunder, kunne undersøkes konkret. Dette representerer noe nytt i forhold til den tradisjonelle framstillingen av grenseverdier og den deriverte i de lærebøker jeg har vært borti. Videre vil jeg vise hvordan elevene løste noen av oppgavene i arbeidsheftet, og hvilke diskusjoner dette kunne innebære dem imellom. I etterkant av forsøket fikk elevene en liten test for å se hvilke inntrykk og begrepsforståelser de satt igjen med av denne undervisningsformen. I hovedsak er det elevsvar fra denne testen jeg baserer de neste episodene på.

Episode 1

Elevene har gjennom arbeidsheftet utført et forsøk med dataloggingsutstyret. Idet dataloggeren ble satt til å registrere data ble vogna sendt opp langs skråplanet. Bevegelsessensoren registrerte da avstanden mellom denne og vogna, mens tiden gikk. En posisjon-tid

Posisjon-tid kurve



Figur 2

kurve ble da logget samtidig på datamaskinens skjerm og kunne se ut som i figur 2. Her ser vi at i starten var vogna ca. 1,5 meter fra bevegelsessensoren, etter 2,7 sekunder var vogna 0,4 meter fra sensoren, og stopper her opp et øyeblikk for så å gli tilbake ned langs skinna og dermed også komme lengre vekk fra sensoren igjen.

Etter at forsøket var gjennomført ble elevene bedt om å ta for seg fem tilfeldige tidspunkter på kurva hvor de skulle tegne inn tangenten til punktet. I tillegg skulle elevene beskrive den sammenhengen de fant mellom hellingen (stigningstallet) til tangentene og posisjon-tid kurva.

Følgende løsninger kom opp:

1/3 av elevene ga et svar som kan representeres gjennom besvarelsen i figur 3.

Elevene har her dannet seg et klart bilde av sammenhengen mellom stigningstallet og den formen kurva har. Likevel er det en begrens-

Svar: Hvis linja stiger vil stigningstallet være positivt
Hvis linja synker vil stigningstallet være negativt
Jo høyere stigningstallet er, jo brattere er linja

Figur 3

ning i svaret der elevene sier at *«Jo høyere stigningstallet er, jo brattere er linja»*. Skulle dette ha vært presist nok måtte elevene ha definert både for de positive og de negative verdiene.

Av den resterende 2/3 av besvarelsene var det gitt mer og mindre utfyllende svar, men alle med en grei forklaring på den gitte sammenhengen. Noen av elevene skilte seg klart ut ved å avgi et svar i klar relasjon til forsøket (figur 4).

Disse elevene har tydelig brukt dataloggingsforsøket når de skulle forklare sammenhengen. Det er interessant å legge merke til hvordan elevene bruker det praktiske arbeidet for å forklare og forstå sammenhenger. Dette kom også tydelig fram i klasserommet mens elevene arbeidet med forsøket. Jeg kunne da observere flere elevgrupper som gjentok forsøket med å sende vogna opp langs skråplanet mens kurvene ble vist i dataprogrammet, samtidig som de diskuterte seg imellom hva som egentlig skjedde. En typisk elevkommentar var: *«La oss prøve en gang til, så ser vi hva det blir»*.

Jeg vil også framheve en diskusjon fra en av elevgruppene mens de jobbet med dataloggeren.

Gro tar initiativet til denne diskusjonen ved først å si: *«Når stigningstallet er negativt går posisjon-tid kurva nedover»*. Ine svarer og fullfører kjapt: «*… og positivt så går posisjon-tid kurva oppover. Det er jo bare det.*» Her har egentlig elevene beskrevet sammenhengen mellom stigningstallet til tangenten og kurvas form, men de er ikke helt fornøyde selv.

De diskuterer videre noen resultater de har funnet og sjekker på nytt om disse er riktige eller gale. Gro sier: *«Er det ikke bare å si det da. Når stigningstallet er negativt så går kurva nedover»*. Ine er enig i at det må være nok å skrive det, men helt sikre er de nok ikke. De tar nemlig videre utgangspunkt i forsøket og prøver å finne en sammenheng og følgende kommentarer faller: *«Vogna stiger men så går han ned igjen etterpå»*, *«Ja for det er når vogna kommer nærmere og avstanden til bevegelsessensoren blir mindre at stigningstallet er positivt og omvendt. Skal vi bare skrive det?»*. Jentene prøver så å formulere det de skal skrive ned i arbeidsheftet, og som endelig kommentar før de skriver ned svaret sier Gro: *«Stigningstallet bestemmer jo hvor mye og hvilken vei kurva går»*. Hvorpå Ine svarer: *«Stigningstallet bestemmer alt!»*. Jentene ler og skriver ned svaret sitt, som står i klar sammenheng til det elevene ga uttrykk for i starten av denne episoden. Nemlig: *«Når stigningstallet er negativt går posisjon-tid kurva nedover»*, *«og positivt så går posisjon-tid kurva oppover. Det er jo bare det»*. Her ser vi tydelig hvordan elevene gjennom en praktisk tilnærming til problemstillingen bekrefter eller avkrefter hypoteser de har dannet seg underveis. Dermed ble dataloggeren brukt som et verktøy og en berikelse for elevene når de skulle beskrive ulike sammenhenger.

Episode 2

Elevene skulle nå ta utgangspunkt i posisjon-

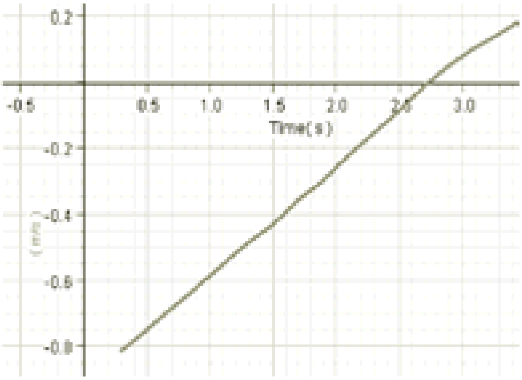
Svar: Stigningstallet til tangenten forteller hvor
vogna er i forhold til ekkoloddet.
Dersom stigningstallet f.eks er negativt vet
vi at vogna er på vei opp mot ekkoloddet.
Før den når et 0-punkt, og stigningstallet blir positivt

Figur 4

Posisjon-tid kurve

Figur 5

Fart-tid kurve



Figur 6

tid kurva og fart-tid kurva, som ble vist på datamaskinens skjerm mens de utførte forsøket (figur 5 og 6). Ut fra disse to kurvene fikk elevene en åpen oppgave der de ble bedt om å redegjøre for sammenhenger mellom disse to kurvene.

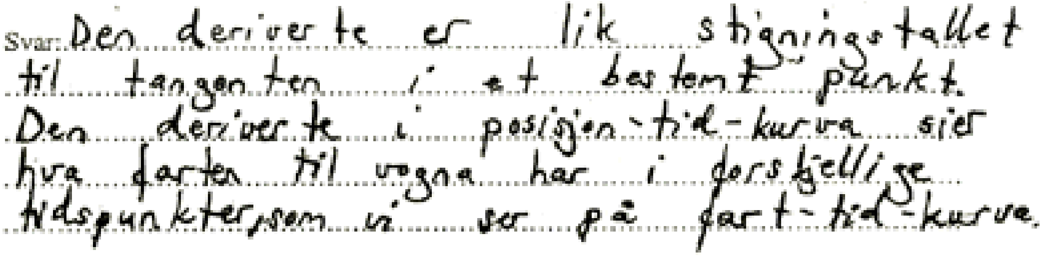
Dette var en vanskelig oppgave for elevene, og det viste seg også at det var en del elever som ikke besvarte denne oppgaven. Likevel var det så mye som 45 % av elevene totalt som i etterkant av forsøket ga en god besvarelse av sammenhengen mellom de to kurvene. Jeg vil også her framheve en av diskusjonene som foregikk på en gruppe mens de jobbet med forsøket.

Ida og Tea diskuterer situasjonen der stigningstallet er lik null. Ida startet med å se på der fart-tid kurva skjærer tidsaksen, og konkluderer med at da må farten vare lik null. I det samme tidspunktet på posisjon-tid kurva oppdager hun at denne har et nullpunkt, og Ida sier at «*Farten er lik null, når stigningstallet er null, på en måte*». Den siste delen av setningen der hun sier «*… på en måte*» kan tyde på at hun ikke er helt sikker på sitt eget utsagn. Tea svarer da bekreftende på Idas utsagn, og presiserer tidspunktet for da farten var lik null til 2,8 sekunder. Deretter ser Tea på posisjon-tid kurva og finner at tidspunktet for da stigningstallet er lik null også er etter samme tid. Ida nikker enig og får bekreftet at det utsagnet hun kom med først stemmer. Her ser vi et fint eksempel på at elevene i samhandling med hverandre finner fram til løsningen, og igjen er begrepsforståelsen knyttet opp mot dataloggeren som verktøy.

Episode 3

Til sist ble elevene bedt om å beskrive det de kjenner til om begrepet *den deriverte*. Som svar på denne oppgaven var det 58 % av elevene som brukte terminologi fra forsøket i sin forklaring, og alle disse forklaringene var gode beskrivelser av den deriverte. Deres besvarelser er selvsagt ikke identiske, men idemessig relativt like, og deres svar kan representeres gjennom besvarelsen i figur 7.

Svaret henviser som sagt til forsøket. Den deriverte beskrives konkret med bakgrunn i posisjon-tid kurva og fart-tid kurva. Svaret er godt i den forstand at den deriverte settes lik stigningstallet til tangenten i et bestemt punkt. Elevene gir ikke en formel for den deriverte, men beskriver med egne ord det de mener den deriverte er et uttrykk for. Dette kan tyde på at



Svar: Den deriverte er lik stigningstallet til tangenten i et bestemt punkt. Den deriverte i posisjon-tid-kurva sier hva farten til vogna har i forskjellige tidspunkter, som vi ser på fart-tid-kurve.

Figur 7

begrepsforståelsen er sterkere enn om elevene kun hadde skrevet opp en formel.

Oppsummering

Det kan trekkes fram både fordeler og ulemper ved bruk av datalogger i matematikkundervisningen. Blant ulempene er det at dataloggingsutstyr koster penger, som ikke alle stramme skolebudsjett kan unnvære. Har man ikke mulighet til å skaffe utstyr til en hel klasse, må man tenke alternativt. En mulighet da er å ha ett utstyrssett, og koble dette til en framviser og et lerret slik at man kan jobbe med gode klassediskusjoner knyttet rundt forsøkene. En annen ulempe er at utstyret tar relativt stor plass, slik at man trenger et rom med doble pulter til disposisjon. Med bakgrunn i dette egner dermed ikke utstyret seg noe særlig til hjemmearbeid. Fordelene derimot er at elevene i løpet av kort tid kan utføre mange forsøk, samt at det er lett å reprodusere eksperimenter. Elevene kan selv innad i gruppene stille hypoteser som de kan teste ved hjelp av verktøyet. Gjennom observasjonen i klasserommet fikk jeg bekreftet at flere elever arbeidet på denne måten, og dette er en god form for elevaktivitet. Elevene får gjennom en slik arbeidsform en induktiv tilnærming til lærestoffet, noe som ofte har vært utelatt i den tradisjonelle matematikkundervisningen. I tillegg til samarbeidet i gruppene, med godt motiverte elever, danner dette gode læringsarenaer for elevene.

Dataprogrammet har også den fordelen at det kan samle store mengder informasjon. Dermed blir det opp til brukerne å velge ut hvor mye av denne informasjonen som blir behandlet. I denne forbindelse er det viktig at verktøyet blir brukt i en pedagogisk sammenheng. Fra mitt ståsted vil jeg si at datalogger helt klart vil være en hensiktsmessig innfallsvinkel til begrepsforståelse av den deriverte. Videre er det flere begreper som kan synliggjøres ved et slik verktøy, og det er nesten bare fantasien som setter en stopper for bruken. I forlengelsen av de episodene jeg har skissert, kunne også dataprogrammet ha vist en akselrasjons-tid kurve, som dermed er den andrederiverte av posisjon-tid kurva. Ellers kan også bevegelsessensoren knyttes opp mot forståelse og tolkning av kinetiske grafer, noe som er høyst aktuelt i ungdomsskolen.

Litteratur

Kalvø, T. (2002) *Den deriverte på skråplanet. Bruk av datalogger i begrepsforståelse av den deriverte.* Hovedoppgave i matematikkdidaktikk. Kristiansand: Høgskolen i Agder.

Amit, M. & Vinner, S. (1990). Some misconceptions in calculus – Anecdotes or the tip of an iceberg? In *proceeding of the 14th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education, 1, 3-10.* Mexico: The program committee of the 14th PME conference.

(fortsettes side 14)

(litteraturliste fortsatt fra side 7)

Aspinwall, L., Shaw, K. L. & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 301-317.

Bezuidenhout, J. (1998). First-year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 29, 389-399.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. In Kaput, J. J. & Dubinsky, E. (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning. Preliminary analyses and results. MAA notes number* 33, 31-45. Washington: The Mathematical Association of America.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.

Villarreal, M. E. & Borba, M. C. (1998). Conceptions and graphical interpretations about derivative. In Oliver, A. & Newstead, K. (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education,* 4, 316. Stellenbosch, South Africa: The program committee of the 22nd PME conference.