

Frode Rønning

# Geometriske mønster i islamsk kunst

## Innledning

I alle de store verdensreligionene spiller utsmykningen i de religiøse bygningene en viktig rolle. Utsmykningen har imidlertid noe ulik karakter i de forskjellige religionene. I (Rønning 2003a og 2003b) har jeg vist noen eksempler på hvordan en kristen kirke kan danne utgangspunkt for samtaler og undersøkelser knyttet til geometri for elever på forskjellige klassetrinn. I kirker finner vi mange ulike geometriske mønster og former som kan være interessante, men en stor del av utsmykningen er også basert på avbildninger av personer, gjerne i form av bilder som skal fortelle en historie. Dette er imidlertid ikke tilfelle i Islam, der det spesielt ikke skal forekomme noen form for avbildning av guddommen. Den islamske utsmykningen som vi finner i moskeer og andre bygninger med tilknytning til islamsk eller arabisk kultur er abstrakt, og dermed har det i denne kulturen utviklet seg en rik tradisjon med utsmykninger basert på

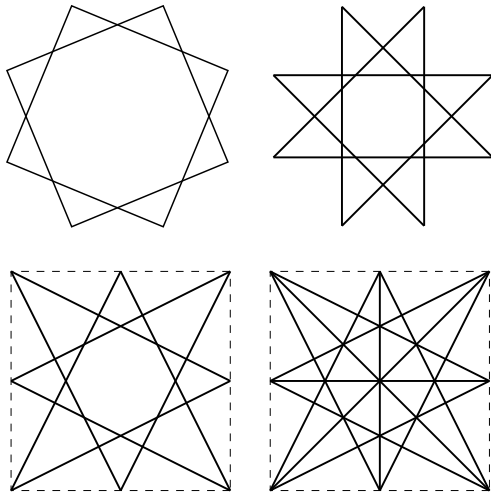
geometriske former. I denne artikkelen vil jeg vise noen eksempler på slike utsmykninger og se litt nærmere på matematikken som ligger bak dem.

## Åttetakkete stjerner

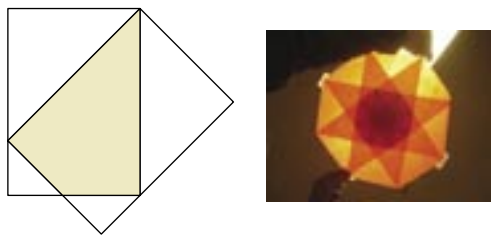
Både i kristen og islamsk kultur finner vi ofte mønster som er basert på åttekanter eller åttetakkete stjerner. Mange kirker har åttekantet grunnflate, døpefonter er ofte åttekantede, og rosevinduer i store katedraler har ofte åtte blader. I kristne kirker er det som oftest bare den regulære åttekanten vi ser, men i Islam finner vi ulike varianter av åttekantsymmetri. I Figur 1 ser vi fire variasjoner over dette temaet, som vi kan finne igjen i dekorasjoner.

Stjerna til høyre i Figur 1 er lett å lage ved hjelp av åtte ark i A4-format. Legg arkene oppå hverandre slik som vist i Figur 2. Hvis du bruker silkepapir i én farge trer denne stjerna fram i flere størrelser innover i figuren når du holder det ferdige produktet opp mot lyset. Dette blir en fin vindusdekorasjon. Stjerna til høyre i Figur 2 er laget av lærerstudenter ved Høgskolen i Sør-Trøndelag og viser effekten som oppstår når den holdes mot lyset.

Frode Rønning  
Høgskolen i Sør-Trøndelag  
Avdeling for lærer- og tolkeutdanning  
N-7004 Trondheim



Figur 1

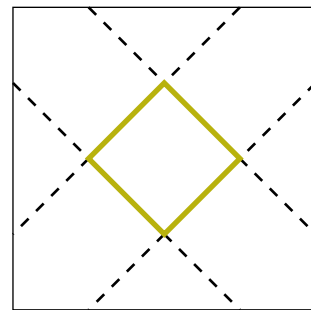


Figur 2

### Spørsmål til ettertanke:

- Ta åtte A4-ark. Legg dem oppå hverandre, nøyaktig hjørne mot hjørne og hjørne mot kant som i Figur 2. Da skal det gå akkurat opp uten åpning eller overlapping i det siste hjørnet. Hvorfor blir det slik? (Hvor mange grader vris arket i forhold til det som ligger under, og hva er det med A4-formatet som gjør at vinkelen blir akkurat så stor?)
- Kan du lage ark som er slik at de ved å legges på samme måte som i Figur 2 vil gi ei sekstakket stjerne? Hvordan må formatet på arkene da være?

De som er interessert i andre varianter av vindusstjerner kan se i (Gibbs 1999).



Figur 3

### Det dreide kvadratet

Stjerna øverst til venstre i Figur 1 er laget ved hjelp av to like store kvadrater, dreid 45 grader i forhold til hverandre. Prinsippet med det dreide kvadratet finner vi også i mange andre mønster, der variasjonen i mønster kommer ved å velge forskjellig størrelse på de to kvadratene. I Figur 3 ser vi andre varianter av det dreide kvadratet. Bildene er hentet fra (Field 2000).

På bildet i midten i Figur 3 ser vi at det innerste mørke kvadratet er akkurat halvparten så stort som kvadratet utenfor. Da treffer

sidekantene i det indre kvadratet midtpunktene på sidekantene i det ytre. I det øverste bildet treffer (forlengelsen av) sidekantene ikke midtpunktene på sidekantene i det ytre kvadratet, og det ser ut til at det indre kvadratet er mindre enn halvparten av det ytre, men hvor mye mindre?

### Oppgave:

- Tenk deg at forlengelsen av sidekantene i det indre kvadratet treffer det ytre kvadratet i punkter slik at forholdet mellom den korte og den lange delen er 1:3. (Figur 3, nederst.) Hvor stort er det indre kvadratet i forhold til det ytre?
- Samme oppgave, men nå er forholdet mellom den korte og den lange delen  $a:b$ .

### Flatedekkende mønster

Noe av det mest spennende i islamske mønster er kanskje mosaikkene og andre flatedekkende mønster. Disse varierer fra ganske enkle og lett gjennomskuelige til svært kompliserte, der grunnmønsteret ofte er kamuflert gjennom ekstra linjer og bruk av farger. Matematisk kan flatemønstrene betraktes på flere måter. Noen av mønstrene kan studeres som tesselleringsmønster, og en utfordring kan være å finne ut hvilken grunnfigur og hvilke teknikker som er brukt.

De klassiske tesselleringsteknikkene er beskrevet i bøker, f.eks. (Kirfel 2002) og i artikler, også i Tangenten, f.eks. (Kirfel og Hestholm 1995, se også artikkelen *Fliselegging i klasserommet* i dette heftet). Disse teknikkene finner vi igjen i de islamske mønstrene. Eksemplene mine i det følgende er alle hentet fra den mauriske kulturen i Spania som er særlig eksponert gjennom palasset Alhambra i Granada og den store moskeen i Córdoba. Eksemplene er illustrert med egne bilder. I

annen kunst er disse teknikkene godt kjent fra arbeidene til den hollandske kunstneren M.C. Escher. Det er utgitt mange bøker om Eschers kunst, ei bok som inneholder mange eksempler på tesselleringsarbeider er (Locher 2000). Søk etter Escher på Internett vil også gi tilgang til mye stoff.

Når vi snakker om symmetrier i én enkelt figur, så mener vi enten *speiling* eller *rotasjon*. I et flatedekkende (uendelig) mønster derimot, har vi flere mulige bevegelser som naturlig kan kalles symmetrier i mønsteret. I tillegg til speiling og rotasjon, kan vi ha *translasjonssymmetri* (parallellforskyving) og *glidespeiling*, som er en kombinasjon av translasjon og speiling. Det er disse fire transformasjonene som ligger til grunn for tesselleringsteknikkene som gjør det mulig å deformere ei flatedekkende grunnflis til ei ny flis som fortsatt er flatedekkende. Teorien knyttet til disse transformasjonene er beskrevet i (Rinvold 2003).

Jeg vil ta med en liten kommentar om en egenskap ved rotasjon i *hele mønster* som jeg synes er interessant. I en enkelt figur kan vi lage alle former for rotasjonssymmetri, f.eks. vil en regulær femkant ha rotasjonssymmetri på 72 grader, en regulær sekskant har 60 grader og en regulær  $n$ -kant har rotasjonssymmetri som er  $360/n$  grader. Rotasjonssymmetri i et helt mønster derimot, er mye mer restriktivt. Det viser seg at de eneste rotasjonene som kan opptre i et flatedekkende mønster er 180, 120, 90 og 60 grader. Noen mønster kan ha flere rotasjoner, men det er også visse kombinasjoner av rotasjoner som er umulige. Eksempelvis kan ikke et mønster samtidig ha en 60-graders rotasjon og en 90-graders rotasjon. Det vil føre for langt her å gå inn på hvorfor det er slik. Interesserte henvises til (Martin 1982).

Se på bildene i figur 4, begge fra Alhambra. Begge er utsnitt av mønster som dekker ganske

store flater. Bildet til venstre er fra en søyle. Disse bildene kan betraktes både ut fra hvilke tesselleringsteknikker som er brukt og hvilke symmetrier de inneholder.



Figur 4

### Spørsmål til diskusjon:

- Hvilke symmetrier finner dere i disse mønstrene? Markér eventuelle speilingsakser, glidespeilingsakser og rotasjonscentre.
- Hvilke inntrykk av bevegelse skapes det i bildene og hvordan henger det sammen med de symmetriene som finnes?
- Hvilke grunnfigurer og teknikker (se Kirfel 2002) er brukt for å lage mønstrene?

De samme mønstrene finnes ofte i flere varianter. I Figur 5 ser vi et mønster, også fra Alhambra, som har nøyaktig de samme egenskapene som mønsteret til venstre i Figur 4.



Figur 5

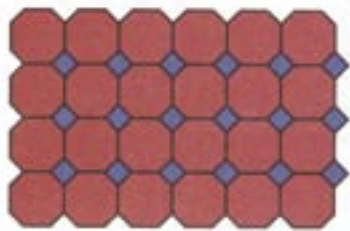
Ved å kombinere de fire transformasjonene (speiling, rotasjon, translasjon og glidespeiling) på ulike måter kan vi lage mønster som

kan kategoriseres i klasser etter hvilke egenskaper de har felles. Det er ikke så overraskende at dette bare kan gjøres på et endelig antall måter, men det som er overraskende er at det faktisk er ganske få muligheter, nemlig 17. Jeg vil ikke gå inn på hvordan man kan vise at det blir bare 17, og hva som karakteriserer hver av de 17, men en liten kommentar kan gjøres. Jeg har allerede nevnt at rotasjoner kan bare forekomme som 180, 120, 90 eller 60 grader. Dette gir fem hovedklasser når vi inkluderer muligheten 'ingen rotasjon'. Innenfor disse hovedklassene kan man da begynne å variere med speilinger og glidespeilinger på forskjellige måter, og til slutt vil man ha fått med alle mulighetene. En detaljert beskrivelse av de 17 klassene finnes f.eks. i (Martin 1982). Disse 17 klassene er kjent under navnet 'de 17 tapetgruppene' (wallpaper groups). Uansett hvilket flatedekkende mønster vi ser på, så vil det være mulig å plassere det i en av de 17 tapetgruppene.

Mange matematikere har undersøkt dekorasjonene i Alhambra for å klassifisere dem i henhold til tapetgruppene, og det har spesielt vært en del oppmerksomhet rundt spørsmålet om faktisk alle 17 finnes der. På et tidspunkt ble det hevdet at bare 13 av de 17 var representert i Alhambra, men nå er det godt gjort at alle 17 virkelig finnes. Mine referanser til dette er (Gómez 1995b) der han spesielt tar opp de fire "manglende gruppene" og (Gómez 1995a) som inneholder bilder som viser ett eksempel på hver av de 17. En annen god, og lett lesbar referanse til mønstrene i Alhambra er et notat skrevet av John Jaworski. Det er, så vidt jeg vet, ikke publisert, men kan fås fra forfatteren. I referanselisten har jeg oppgitt en veadresse som viser hvordan notatet kan skaffes.

## Tesselleringer med flere flistyper

Hvis vi skal fylle en flate med bare regulære mangekanter, finner vi nokså fort ut at de eneste som kan brukes er regulære trekkanter, firkanter eller sekskanter. Disse gir ikke så spennende mønster med mindre vi begynner å deformere figurene slik som i eksemplene ovenfor. Hvis vi derimot tillater oss å bruke flere typer regulære mangekanter i samme mønster, kan det bli ganske spennende uten å deformere figurene. Da er det heller ikke så opplagt hvilke muligheter som finnes. Dette temaet er tatt opp i (Rønning 2002). Med visse ekstra krav til mønsteret, ut over at det skal bestå av to eller flere typer regulære mangekanter, viser det seg at det bare er mulig å lage åtte ulike mønster (Martin 1982). Av disse er det noen som er spesielt populære i praktisk bruk i mosaikker, og et som vi finner svært ofte, er det som består av regulære firkanter og åttekanter, som vist i Figur 6.



Figur 6

I Figur 7 nedenfor ser vi tre bilder fra den store moskeen i Córdoba. De er alle bygd på mønsteret ovenfor, men det som gjør det ekstra spennende er at det er innført flere delelinjer slik at vi kan se andre figurer enn bare de regulære åttekantene og firkantene. Kanskje det til og med er de andre figurene som er mest iøynefallende? På det nederste bildet kan vi for øvrig



Figur 7

ane mønsteret fra Figur 5 på veggflaten rundt vinduet.

### Spørsmål til diskusjon:

- Hvilke figurer ser du først i hvert av disse bildene? Beskriv på din måte hvordan mønstrene er bygd opp.
- Kan du finne igjen det regulære åttekant-firkant mønsteret fra Figur 6?

- Kan du beskrive hva det er som gjør mønstrene forskjellige selv om de er bygd på samme grunnmønster?
- Beskriv eventuelle symmetrier du finner i mønstrene.

For å styrke forståelsen for hvilke symmetrier som finnes og ikke finnes, både i enkeltfigurer og i mønster, har jeg god erfaring med å bruke farger som hjelpemiddel. I ett og samme mønster kan vi legge til eller ta bort symmetrier gjennom å variere fargebruken. Nedenfor viser jeg et bilde fra Alhambra med de originale fargene.



Figur 8

### Eksperiment:

- Med de originale fargene har dette mønsteret speilingssymmetri og 180 graders rotasjonssymmetri. Kan du finne speilingsaksene og rotasjonssentrene?
- Tenk deg nå at de blå og gule feltene også blir mørke, slik at bildet bare får to farger, lys bakgrunn og mørkt mønster. Hvilke symmetrier får du nå?
- Kan du fargelegge på en annen måte slik at symmetriegenskapene forandres ytterligere?

En aktivitet som bygger på denne idéen, og som lett kan gjennomføres med elever, er føl-

gende. Slå en sirkel med passerens, og sett deretter passerens på sirkelranda og med samme radius slå en sirkelbue som skjærer randa i to punkter. Flytt passerens til et av disse punktene og slå en ny sirkelbue. Fortsett med dette til du har ei seksbladet rose inne i den opprinnelige sirkelen. Dette er noe som sikkert alle barn har gjort når de har fått en passer i hendene. Finn symmetriene i denne rosa. Lag flere, og fargelegg dem på ulike måter, med to, tre eller flere farger. Finn symmetriene i de forskjellige versjonene.

### Referanser

- Field, R. (2000). *Geometric Patterns from Islamic Art and Architecture*. Stradbroke: Tarquin.
- Gibbs, W. (1999). *Window Patterns*. Stradbroke: Tarquin.
- Gómez, R.P. (1995). 17, 46,..., 627,... sinfonías para una loseta: los mosaicos de la Alhambra de Granada. I: Al-Andalus, *El legado científico*, Ronda: Palacio de Mondragón.
- Gómez, R.P. (1995). Problemas resueltos. I: Torres, M.V. (red.). *Epsilon, 2a Edición*, Granada: S.A.E.M. Thales.
- Jaworski, J. (upublisert). *A Mathematician's Guide to the Alhambra*. [www.grout.demon.co.uk/Travel/travel.htm](http://www.grout.demon.co.uk/Travel/travel.htm)
- Kirfel, C. og Hestholm, G.N. (1995). Flisespikkeri, *Tangenten* nr. 4/1995, s. 30-38.
- Kirfel, C. (2002). *Eksperimentering med matematikk 2*. Bergen: Caspar.
- Locher, J.L. (2000). *The Magic of M.C. Escher*, London: Thames & Hudson Ltd.
- Martin, G.E. (1982). *Transformation Geometry*, Berlin: Springer Verlag.
- Rinvold, R.A. (2003). *Visuelle perspektiv. Avbildninger og symmetri*. Bergen: Caspar.
- Rønning, F. (2002). Tesselleringer med mer enn én flistype, *Tangenten* nr. 2/2002, s. 34-39.
- Rønning, F. (2003a). Geometrien på Vestfronten. I: *Idéhefte for grunnskolen*, Trondheim: Komitéen for 850-årsjubileet for Nidaros erkebispede, Grunnskolekomitéen.
- Rønning, F. (2003b). En katedral för lärande i geometri, *Nämnamnaren* nr. 4/2003, s. 3-8.