Terje Myklebust

Hjelp til gangetabellen

For mange elevar kan gangetabellane kan vere vanskelege å hugse, spesielt gjeld dette seksgangen, sjugangen og åttegangen. Om ein t.d. ikkje hugsar kva 7 multiplisert med 8 er, så finst det mange gode måtar å tenkje seg fram til svaret på. Vi vil presentere ein metode som vi synes er enkel og artig. Vi veit at $7 \cdot 8 = 56$. At siste siffer er 6 kan vi finne på fylgjande måte,

$$(10-7)(100-8) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Er dette berre eit slumpetreff ? La oss sjå på eit anna døme: Siste siffer i produktet av 6 og 9 er 4 ($6 \cdot 9 = 54$), men det kan vi også finne ved fylgjande utrekning, $(10-6)(10-9) = 4 \cdot 1 = 4$. Regelen kan formulerast slik:

Regel 1

Vi tenkjer oss to heile tal a og b, som begge er mellom null og ti. Vi lar

(1) $\quad x = 10 - a \quad$ og $\quad y = 10 - b.$

Siste siffer i produktet $a \cdot b$ er lik siste siffer i produktet $x \cdot y$.

Når vi multipliserer to tal som er mindre enn fem, har regelen ingen verdi, sjølv om den også fungerer i desse tilfella.

Regel 1 gir oss altså siste siffer, men kva med det første sifferet, altså talet på tiarar? Finst det ein tilsvarande regel her? La oss igjen sjå på produktet av 7 og 8. Talet på tiarar kan vi finne ved å ta

$7-2$ (der to-talet kjem av at $10-8=2$),

eller vi kan ta

$8-3$ (der tre-talet kjem av at $10-7=3$).

I begge tilfella får vi verdien 5 som er talet på tiarar, eller første siffer, i produktet $7 \cdot 8 = 56$. Dessverre fungerer ikkje dette alltid. La oss sjå på produktet $6 \cdot 7 = 42$. Nyttar vi metoden over, finn vi at talet på tiarar er $6-3=3$. Altså verkar ikkje metoden i dette tilfellet. Men vi har at $(10-6)(10-7) = 4 \cdot 3 = 12$, og første siffer er altså 2 i fylgje regel 1. Om vi no tek 3 tiarar (som kjem av at $6-3=3$) pluss 12 einarar, så får vi $3 \cdot 10 + 12 = 30 + 12 = 42$ som er produktet av 6 og 7. No kan vi formulere ein regel som fungerar for alle heiltala mellom null og ti.

Regel 2

La a og b vere to heile tal mellom null og ti. Igjen lar vi $x = 10 - a$ og $y = 10 - b$.

i) Dersom produktet $x \cdot y$ er einsifra, då er talet på tiarar i produktet $a \cdot b$ gitt ved

(2) $\quad a - y$, eller likeverdig $b - x$.

ii) Dersom produktet $x - y$ har meir enn eitt siffer, finn vi talet på tiarar ved å addere første siffer i dette produktet (altså talet på tiarar i dette produktet) og talet vi fekk i (2).

Starten på artikkelen sto på trykk i Tangenten 1/2003

Desse reglane kan vi samanfatte i ein formel:

Regel 3 [samanfatning av regel 1 og regel 2]

Vi lar igjen $x = 10 - a$ og $y = 10 - b$.

Vi har at

(3a) $$ab = (a - y)10 + xy$$

eller tilsvarande at

(3b) $$ab = (b - x)10 + xy.$$

Døme: Vi vil multiplisere 7 og 8. Då lar vi $a = 7$ og $b = 8$, og så finn vi $x = 10 - 7 = 3$ og $y = 10 - 8 = 2$. Formelen seier at $7 \cdot 8 = (7 - 2) \cdot 10 + 3 \cdot 2 = 50 + 6 = 56$. Einarane finn vi ved å multiplisere 3 og 2, medan vi finn tiarane ved å ta det eine talet, t.d. 7, og subtrahere 2 (=10 – 8). Altså har vi $7 - 2 = 5$ tiarar og $3 \cdot 2 = 6$ einarar.

Vi kan sjølvsagt ikkje basere oss på desse reglane, før eller seinare må vi kunne multiplikasjonstabellane. Men desse reglane, og kanskje spesielt regel 1, kan kanskje vere nyttige i perioden før vi meistrar multiplikasjonstabellane skikkeleg. Reglane kan t.d. fungere som kontroll på at vi faktisk hugsar rett. T.d. blandar mange saman produkta 56 ($7 \cdot 8$) og 54 ($6 \cdot 9$), og då kan regel 1 vere eit enkelt hjelpemiddel for å skilje desse to situasjonane.

Formlane (3a) og (3b) følgjer umiddelbart ved å løyse opp og trekkje samen ledda på høgresidene. Vi har ulike variantar av desse formlane, t.d.

(4) $$ab = (a + b)10 - 100 + xy,$$

og regel 2 i) kan erstattast med følgjande regel (regel 2 ii) vert erstatta tilsvarande):

Regel 2' [alternativ til regel 2 i)]

Når $x \cdot y$ er einsifra er talet på tiarar lik siste siffer i summen $a + b$.

Somme vil finne regel 2' lettare å bruke, fordi dei finn det lettare å addere enn å subtrahere. Dessutan har regel 2 den bakdelen at vi må halde orden på kva tal vi skal subtrahere ifrå kva, t.d. i produktet $7 \cdot 8$ finn vi talet på tiarar ved å subtrahere tre ifrå åtte, men det er sjølvsagt lett for at vi forvekslar og feilaktig subtraherar tre ifrå sju. Dette problemet får vi ikkje dersom vi nyttar regel 2'.

Ein tredje variant får vi av identiteten

(5) $$ab = (10 - x - y)10 + x \cdot y.$$

Ved hjelp av identitet (5), kan vi erstatte regel 2 i) med: Talet på tiarar i produktet $a \cdot b$ er lik $10 - x - y$ (dersom produktet $x \cdot y$ er einsifra). Her får vi færre tal å hugse på under utrekningane, men vi får ein rekneoperasjon meir enn ved regel 2 og regel 2'.

Kva så med $3 \cdot 8$? Her har vi inga glede av reglane over. Men for å komplettere desse reglane, nemner vi at vi kan finne dette produktet på følgjande måte:

(6) $$3 \cdot 8 = 30 - 3 \cdot 2.$$

Denne metoden er sjølvsagt velkjend, men poenget er at vi no har eit sett med reglar slik at vi i prinsippet ikkje treng å hugse multiplikasjonar større enn $5 \cdot 5$. I neste avsnitt skal vi sjå at (6) har ein interessant samanheng med regel 1.

Sjå også Kirfel (2002) s. 62–64 for ein litt annan innfallsvinkel til desse metodane. Ein artikkel om ytterlegare bruk av desse metodane vil komme i eit seinare nr. av Tangenten. Den interesserte lesar vil også finne Morgan (1982) interessant.

Eit interessant perspektiv

Med bakgrunn i metodane over finn vi det interessant å studere ein struktur som vert kalla for ein ring. Omgrepet ring gir oss nemleg eit interessant og morosamt perspektiv på minus gonger minus og regel 1, faktisk er regel 1 på mange måtar ein parallell til minus gonger minus.

Når vi adderer to positive reelle tal vert sjølvsagt summen større enn kvar av addendane, men slik er det ikkje i alle system. Om vi t.d. tenkjer oss at klokka no er 10:00 og går fem timar fram i tid, så er klokka 'berre' 03:00 (om vi nyttar ei tolv timars klokke). La oss tenkje oss eit 'klokkesystem' der vi berre har tala 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9 (men ikkje noko posisjonssystem). Vi definere addisjon på vanleg måte heilt til summen 'vert større enn' ni. Då startar vi opp at på null. Det vil t.d. sei at 8 + 1 = 9, men 8 + 2 = 0 og 8 + 3 = 1, etc., altså etter same prinsippet som vi adderer timar i ei vanleg klokke. Dette vert kalla for addisjon modulo ti. I dette systemet er t.d.

$$2\cdot 6 = 6 + 6 = 2 \quad \text{og} \quad 7\cdot 8 = 6,$$

der multiplikasjon er definert som gjenteken addisjon. Samanliknar vi med vårt system der $2\cdot 6 = 12$ og $7\cdot 8 = 56$, ser vi at det siste sifferet stemmer overeins i desse to systema.

Vi snakkar ofte om motsette tal, t.d. er –8 det motsette talet til 8 (og omvendt er 8 det motsette talet til –8), dette fordi at 8 + (–8) = 0. Vi veit at 'minus gonger minus' gir pluss, med andre ord veit vi at produktet av to tal er lik produktet av dei to motsette tala. T.d. er $7\cdot 8 = (-7)\cdot(-8)$. Har vi motsette tal i 'klokkesystemet' over? Ja, det har vi, men her er 2 det motsette talet til 8. Det kjem av at

$$8 + 2 = 0.$$

Vidare er 3 det motsette talet til 7 (sidan 7 + 3 = 0), og tilsvarande finn vi det motsette talet til eit kvart tal i 'klokkesystemet'.

La oss sjå på multiplikasjon i dette 'klokkesystemet'. Er produktet av to tal i dette systemet det same som produktet av dei motsette tala i dette systemet? Svaret er ja, dvs. at i dette systemet er

$$7\cdot 8 = 3\cdot 2.$$

La oss skrive $\overline{8}$ for det motsette talet til 8, dvs at $\overline{8} = 2$. Generelt kan vi skrive $\overline{a}$ for det motsette talet til a (der a er eitt av tala 0, 1, … , 9) (NB! Det er vanleg å nytte notasjonen $-a$ for det motsette talet til a, men for å ikkje blande saman dei motsette tala i klokkesystemet med dei negative tala i det reelle talsystemet, så vel vi å nytte ein annan notasjon her). Vi får blant anna at

$$2\cdot 8 = \overline{2\cdot\overline{2}} = \overline{4} = 6\,,$$

dette tilsvarar (notasjonsmessig) at vi i vårt reelle talsystem har at

$$2\cdot 8 = -(2\cdot(-8)) = -(-16) = 16.$$

Men korleis går det om vi innfører desimaltal i klokkesystemet? Er t.d.

$$8\cdot 8{,}5 \overset{?}{=} 2\cdot 1{,}5$$

(hugs at 1,5 er det motsette talet til 8,5 sidan 8,5 + 1,5 = 0). Svaret er nei, vi finn at venstre sida

$$8\cdot 8{,}5 = 8, \text{ medan høgre sida: } 2\cdot 1{,}5 = 3.$$

Vi ser at regelen om å multiplisere dei to motsette tala, i staden for dei opphavlege tala, ikkje fungerar her.

Kva er grunnen til at regelen fungerar når vi berre nyttar heiltala frå 0 til 9, men ikkje verkar når vi innfører desimaltala? For å finne svaret vel vi å gå litt djupare inn i matematikken. Vårt 'klokkesystem' er eit døme på ei mengde (elementa 0, 1, … , 9) der operasjonen addisjon og multiplikasjon er definerte, som stettar krava til strukturen ring. Dvs. at følgjande eigenskapar er stetta:

La a, b og c vere tre tal i mengda 0, 1, … 9. Då har vi at:

1. $a + b = b + a$ (kommutativ lov for addisjon)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (assosiativ lov for addisjon)
3. Elementet 0 er slik at $a + 0 = 0 + a = a$, for alle element a i denne mengda.
4. Til alle tal a i denne mengda så er der eit tal $\overline{a}$ (som også er eit tal i denne mengda, og som vi kan kalle det motsette talet til a) slik at $a+\overline{a}=0$.
5. $(ab)c = a(bc)$ (assosiativ lov for multiplikasjon)
6. $a(b + c) = ab + ac$ og $(b + c)a = ba + ca$ (distributive lover)

Hugs at dei reelle tala også har desse seks eigenskapane. I tillegg har dei nokre fleire eigenskapar som 'klokkesystemet' ikkje har. Ved hjelp av desse eigenskapane (aksioma) kan vi vise at $a\cdot b=\overline{a}\cdot\overline{b}$, som hjå dei reelle tala tilsvarar at produktet av t.d. to positive tal er lik produktet av dei tilsvarande negative tala. Det er interessant å studere beviset for dette, og vi gjengir beviset. Den distributive lova (og punkt 4.) gir oss at

$$(7) \qquad ab+a\overline{b}=a(b+\overline{b})=a\cdot 0=0\,.$$

Merk at $\overline{a\overline{b}}$ er det motsette elementet til $a\overline{b}$, og om vi legg til dette elementet på begge sider i likning (7) får vi at

$$(8) \qquad ab=\overline{a\overline{b}}\,.$$

Vi nyttar den distributive lova ein gong til og finn at

$$(9) \qquad a\overline{b}+\overline{a}\overline{b}=(a+\overline{a})\overline{b}=0\cdot\overline{b}=0\,.$$

Som vi gjorde i (7), adderar vi $\overline{a\overline{b}}$ på begge sider i likning (9). Vi får at

$$(10) \qquad \overline{a}\overline{b}=\overline{a\overline{b}}\,.$$

Ved å kombinere (8) og (10) får vi at

$$ab=\overline{a}\overline{b}\,.$$

Vi har altså vist at i 'klokkesystemet' er $8\cdot 7=\overline{8}\cdot\overline{7}=2\cdot 3=6$, som svarar til regel 1. Vidare har vi at $4\cdot 8=\overline{4\cdot\overline{8}}=\overline{4\cdot 2}=\overline{8}=2$, som svarar til (6) (vi overlet detaljane til lesaren). Er ikkje dette vakkert?

Men kvifor gjeld ikkje dette når vi innfører desimaltal i 'klokkesystemet'? Svaret er at den distributive lova ikkje lenger er oppfylt. Dette kan visast ved eit døme:

$$1{,}5(4+6)\overset{?}{=}1{,}5\cdot 4+1{,}5\cdot 6$$

Venstre sida: $1{,}5(4 + 6) = 1{,}5\cdot 0 = 0$,
medan høgre sida: $1{,}5\cdot 4 + 1{,}5\cdot 6 = 6 + 9 = 5$.

Vi ser at den distributive lova ikkje gjeld her, og derfor gjeld heller ikkje beviset.

Referansar

Kirfel C. (2002). *Eksperimentering med matematikk 2*. Caspar forlag.

Morgan D. (1982). *Arithmetic made easy.* New Scientist, 22 April, 221–223.