Henrik Dahl

HVORFOR ER SANNSYNLIGHET SÅ VANSKELIG?

Innledning

Blant folk som underviser i sannsynlighetsreging og statistikk er det en utbredt oppfatning at sannsynlighet er vanskelig å formidle. Professor David S. Moore, som er en av verdens ledende autoriteter, argumenterer for at man bør sløyfe mye av sannsynlighetsregningen i innføringskurs i statistikk:

”It would be wise, I think, to continue to reduce the place of formal probability in teaching statistical practice to beginners”.

Historikk

På 1800-tallet var mange av den oppfatning at det ikke var mulig å formalisere sannsynlighet på noen tilfredsstillende måte. Medvirkende til dette synet var en del oppgaver som kunne gi ulike svar alt etter hvordan oppgaven ble formulert.

Et berømt tilfelle er Bertrands kordeparadoks:

I en sirkel med radius 1 velges tilfeldig en korde. Hva er sannsynligheten for at den har lengde $> \sqrt{3}$? (dvs større enn siden i en likesidet innskrevet trekant)

Ved å tolke ”tilfeldig valgt korde” på tre ulike måter, får en svarene 1/2, 1/3 og 1/4.

Principle of insufficient reason

I 1763 formulerte Thomas Bayes tesen:

Hvis vi står overfor et visst antall muligheter og vi ikke vet hvilken som vil inntreffe, er alle mulighetene like sannsynlige.

Dette ble kalt ”Priciple of insufficient reason” og var akseptert av mange på 1800-tallet. Som vi ser er alle tre løsninger av Bertrands kordeparadoks eksempler på bruk av dette prinsippet. På tross av dette og andre paradokser sto ”Principle of insufficient reason” sterkt helt til etter år 1900.

Starten på denne artikkelen sto på trykk i Tangenten 1/2003

Hvorfor ”Principle of insufficient reason” er feil

I 1933 kom Kolmogoroffs aksiomatisering av sannsynlighet, som viste at det faktisk er mulig å formalisere sannsynlighet på en tilfredsstillende måte.

På denne tiden kom det kraftig kritikk av ”Priciple of insufficient reason” bl.a. fra statistikeren R.A.Fisher. Han påpekte at det vanligvis er mange måter å liste opp de mulighetene vi er usikre på. Da vil vi kunne få ulike svar alt ettersom hvordan vi formaliserer situasjonen.

Bok om matematikk for barn

Jeg har trodd at avvisningen av ”Priciple of insufficient reason” var velkjent og akseptert av alle i dag helt til Anne Nygaard gjorde meg oppmerksom på:

Damms store bok om matematikk, Damm 1997, som er en oversettelse av: Carol Vordeman: How Mathematics Work, Dorling 1996.

Som vanlig i populærvitenskapelig bøker er teksten spekket med dypsindigheter som: ”Den statistikk og sannsynlighetsregning som vi støter på, settes vanligvis sammen av statistikere”. Dette tilsvarer den velkjente ”Reven er lur , derav navnet Mikkel.”

Nå kan en vel ikke vente å finne fullgode forklaringer på vanskelige ting som normalfordeling i populærvitenskapelige bøker for barn, men en kan bli betenkt over forklaringer som: ”Mange slags data som beskriver naturlige fenomener, som menneskers høyde eller avlingenes størrelse, fordeler seg jevnt omkring en middelverdi, med stort sett like antall på begge sider. Statistikerne kaller data som er fordelt på denne måten for ”normalfordelte”.”

Statistikere som har denne oppfatningen av normalfordelingen kan komme til å feiltolke data som kommer fra en symmetrisk fordeling med tunge haler. Data om avling kan godt komme fra en slik fordeling hvis det av og til er uår og av og til kronår.

Mer alvorlig er det at man i underteksten under overskriften på side 80 faktisk presenterer ”Priciple of insufficiene reason” på formen:

NOEN BEGIVENHETER ER ”TILFELDIGE” OG KAN IKKE FORUTSIES. ALLE MULIGE RESULTATER AV SLIKE BEGIVENHETER ER LIKE `SANNSYNLIGE.

Deretter vil forfatteren forklare barna hvordan sannsynlighet virker med en såkalt nøtt:

I en pose er det en kule som vi vet er enten svart eller hvit. Vi legger oppi en svart kule, rister posen og trekker en kule som viser seg å være svart. Hvor stor er sannsynligheten for at den kulen som ligger igjen, er svart?

Ved å bruke ”the principle of insufficient reason” på en fordekt måte, kommer man frem til svaret 2/3.

Det er altså meningen at barna skal lese (eller bli lest for) fra Damms store bok om matematikk som en motivering og forberedelse til at de skal lære om sannsynlighet på skolen. Jeg vil gjengi en karakterisering av skjødesløse foreldre fra min barndoms Bærum:

”Slokk lyset, lokk opp kjellerlemmen og gi unga barberkniven”

Det blir ikke lett for en stakkars lærer og rydde opp i den lapskausen dette eksemplet har stelt til.

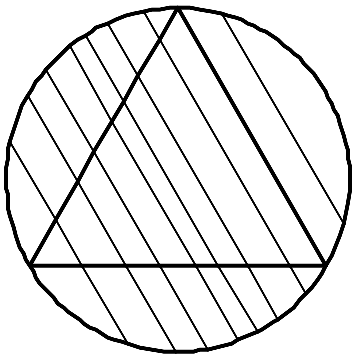
Det hevdes at en bestemt matematisk gåte (om veiing av mynter) ble plantet av tyskerne under stillingskrigen i Frankrike under Første Verdenskrig for å ødelegge kampmoralen til de allierte styrkene. Jeg synes ikke det er langt fra å mistenke noen som ikke ønsker at barna skal få et harmonisk forhold til sannsynlighet for å ha plantet dette eksemplet med onde hensikter.

Med slike ”nøtter” som forkunnskaper blir det ikke lett for en lærer å formidle inntrykket at sannsynlighetsregning er en nyttig og meningsfull gren av matematikken og en kan nok si seg enig med David S. Moore også når det gjelder situasjonen i Norge. For egen regning vil jeg hevde at den overdrevne vektleggingen av kombinatorikk trekker i samme retning.

Starten på denne artikkelen sto på trykk i Tangenten 1/2003

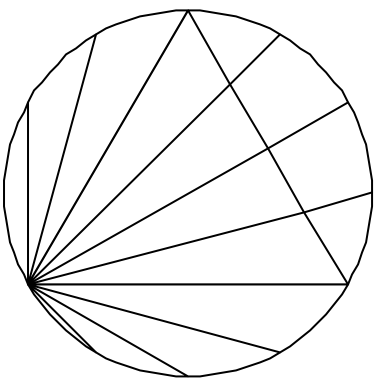
De tre løsningene av Bertrands kordeparadoks ser slik ut:

Løsning 1



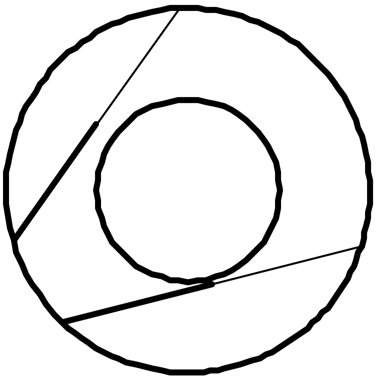
På grunn av symmetrien kan vi velge en vilkårlig retning. Halvparten av kordene som havner i denne retningen vil få lengde over √3. Av dette følger at den søkte sannsynligheten er ½.

Løsning 2



Vi fikserer et punkt på sirkelen. En tredjedel av alle kordene gjennom dette punktet har lengde over √3. Av dette følger at den søkte sannsynlighet er 1/3 .

Løsning 3



Vi retter oppmerksomheten mot midtpunktet på korden. Korden får lengde over √3 hvis midtpunktet på korden ligger i en sirkel med radius ½. Denne sirkelen utgjør ¼ av hele sirkelflaten. Av dette følger at den søkte sannsynlighet er ¼.

Det er ikke godt å vite hvilken av løsningene en skal foretrekke. Data kunne avgjort hvilken av tolkningene av tilfeldighet som er aktuell, men da måtte en ha en bestemt anvendelse i tankene.

Eksempel for egen regning

En gutt får høre at det i nabohuset skal flytte inn en familie med 2 barn. Han ønsker seg en lekekamerat og håper at det er minst en gutt. Hvis han oppfatter det som at han er usikker på mulighetene: ”2 gutter, 2 jenter, en av hver”, sier ”Principle of insufficient reason” at det er en sannsynlighet på 2/3 for at det skal være minst en gutt. Hvis han istedet oppfatter det som at han er usikker på mulighetene: ”Eldste gutt yngste gutt, eldste gutt yngste jente, eldste jente yngste gutt, eldste jente yngste jente”, sier ”Principle og insufficient reason” at det er en sannsynlighet på ¾ for at det skal være minst en gutt.

Nå kan en si at den første av disse regnemetodene er feil, fordi den bygger på en urealistisk modell, men dette er en måte å resonnere på som først ble aktuell med aksiomatiseringen av sannsynlighet. Da hviler nemlig ansvaret for de sannsynlighetene vi setter inn i systemet på den som gjør det. Hvis en skulle ønske å argumentere mot den første modellen, kunne en peke på at den er på kollisjonskurs med forestillingen at kjønnet til etterfølgende barn er uavhengige. For øvrig fødes det litt flere gutter enn jenter. Uansett viser dette at ”Principle of insufficient reason” ikke er å stole på.

På side 186 i Damms store bok om matematikk presenteres ”løsningen” på ”kuleproblemet”:

Hvis vi trekker en svart kule, kan vi ikke vite om den kulen som er igjen, er den opprinnelige (som kan være svart eller hvit) eller den nye (som er svart). Dette gir tre muligheter: svart, svart, hvit, derfor er sannsynligheten for å finne en svart lik 2/3; sannsynligheten for å finne en hvit er lik 1/3. Hvis vi trekker en hvit kule, må det være den opprinnelige, derfor vet vi at den nye (svarte) ligger igjen i posen. Sannsynligheten for at kulen som er igjen er svart, er derfor lik 1, sannsynligheten for at den er hvit, er lik 0.

Det er ikke vanskelig å si seg enig med den siste halvdel av resonnementet, men man trenger neppe sannsynlighetsregning for å kunne trekke denne slutningen. Når det gjelder første del har en på fordekt måte brukt ”Principle og insufficient reason”. Det kommer heller ikke fram at det er betingede sannsynligheter det dreier seg om. Jeg synes de tre løsningene av Bertrand’s kordeparadoks er vesentlig mindre grumsete.

Men hva er da en korrekt løsning av denne oppgaven? For å rydde opp i dette rotet ser jeg meg tvunget til å innføre litt notasjon. La p være sannsynligheten for at kula i posen er svart. Når vi da slipper en svart kule opp i posen, får vi mulighetene:

Starten på denne artikkelen sto på trykk i Tangenten 1/2003

SS med sannsynlighet p
HS med sannsynlighet (1-p)

Vi søker så den betingede sannsynlighet for SS gitt at en kule trukket tilfeldig fra posen er svart:

P(SS)/P(Kula som trekkes er svart)

Nevneren må vi finne ved betinging
(dette er en teknikk som selv universitetsstudenter har vansker med):

P(Kula som trekkes er svart) =
P(Kula som trekkes er svart og SS) + P(Kula som trekkes er svart og HS) =
$p + (1-p)\cdot 0,5$

Setter vi dette inn i uttrykket for den betingede sannsynligheten, får vi:

$p/(p + (1-p)\cdot 0,5) = 2p/(p+1)$

Hvis p = 0, er svaret 0, som rimelig kan være.
Hvis p = 1, er svaret 1, som rimelig kan være.
Hvis p = 0,5, er svaret 2/3, som er det som lanseres som ”fasitsvar”.

Det er altså ingen tvil om at svaret avhenger av p.

Referanser

Bayes T. (1763) Essay toward solving a problem in the doctrine of chances. Sc.London Ser A 53
Bertrand, J. (1907). Calcul de probabilite. 2nd ed Gauthier Vilars. Paris.
Moore , David S. ISI Review 1999 67 s. 252
Kolmogoroff, N. (1933). Foundation of the theory of probability. 2nd ed. Chelsea. New York.