En forståelsesramme for de reelle tal med kompositioner.

af Ulrich Christiansen, sem.lekt. KDAS.

Den traditionelle tallinjemodel, hvor tallene svarer til punkter langs tallinjen, dækker fornuftigt (R, + , <), men giver ofte tolkningsproblemer i situationerne a-b; a·b og a:b når a og b ikke er naturlige tal.
Med mindre ændringer er det imidlertid muligt at skabe en forståelsesmodel, der tilbyder en fornuftig mening med udtrykkene a + b, a - b, a·b og a : b - også i de situationer hvor a eller b er negative eller irrationale tal.

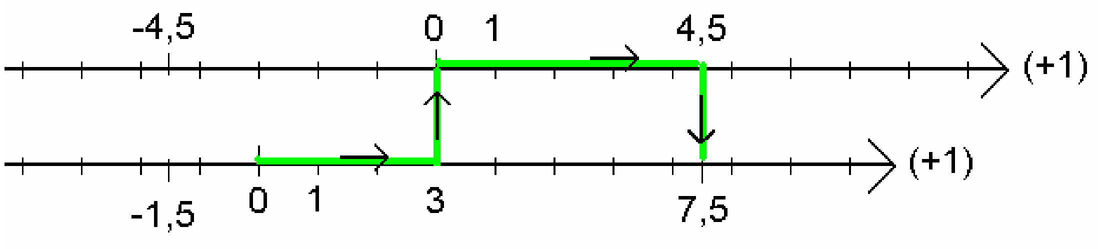
Vi lader tallene svare til beskrivelser af bevægelser langs tallinjer / 'endepunkterne'.
Ex.: *5* svarer til beskrivelsen: vi bevæger os 5 enheder i positiv retning.
-7/4 svarer til beskrivelsen: vi bevæger os 7 gange 1/4 enhed i negativ retning / (evt. omtalt som baglæns).
I stedet for at opfatte sammenhængen mellem de reelle tal og tallinje som en sammenhæng tal til punkt, drejer vi det til **også** at være en sammenhæng tal til beskrivelse af bevægelsen fra nulpunktet til 'talpunktet'. Altså en mere vektororienteret forståelse. Herved bliver det mere meningsfuldt at definere kompositioner, idet det kan være svært at se meningen i at sammensætte punkter, men meningsfuldt at sammensætte bevægelser.
I denne fremstilling vælges derfor at fokusere på 'tallinjebevægelse' som det primære og 'tallinjepunkt' som sekundært.
Der er endvidere valgt at lægge vægt på en opfattelse af tal som beskrivelsesmiddel fremfor en mere objektorienteret forståelse.
Ved taludvidelserne er det rimeligt at sige, at vi mangler talnavne fx til at beskrive nogle længder præcist. Derfor indfører vi nogle flere ord. Først decimaltal – og senere irrationale tal. Også negative tal og brøker kan ses som udvidelser af vores ordforråd, så vi kan beskrive nye situationer mere præcist.

Første del av denne artikkelen sto på trykk i Tangenten 1/2003

Når 4/5 =12/15 = 0,8 = 1 – 0,2 indenfor modellen her er det fordi de på trods af at de er 4 **forskellige** beskrivelser af tallinjebevægelser så slutter de samme sted på tallinjen (når vi starter fra nulpunktet). **På denne måde er de ens**. Og til dette 'endepunkt' på tallinjen kan vi så passende **også** knytte de nævnte 4 talbeskrivelser.

Vi kan indføre regningsarterne som følger:

Addition illustreret / forstået som bevægelse langs tallinjer:
Forstås a og b som beskrivelser af bevægelser langs tallinjer så kan **a + b forstås som en beskrivelse af den sammensatte bevægelse: a fulgt af b, idet b starter, hvor a slutter** – jf. sædvanlig plus via at tælle.
Eksempel: a + b = 3 + 4,5 = 7,5 :

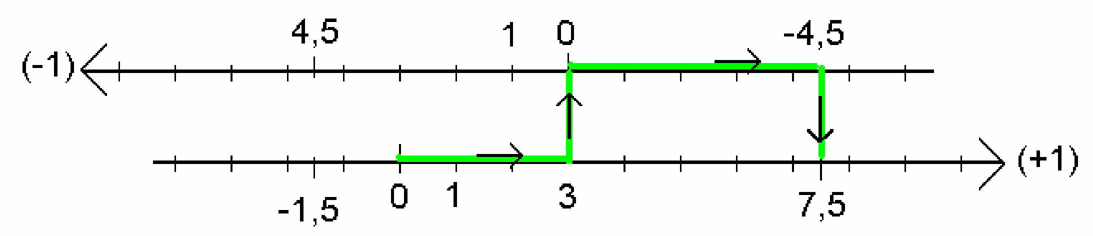


Vi har valgt en enhed. En '+1 tallinje' er en tallinje med denne enhed og med positiv retning vandret mod højre set i forhold til papir/tavle.
Begge tallinjer, svarende til a og b, er '+1 tallinjer' / vender mod højre.

Øvelse: Bestem 3 + (-4,5) via ovennævnte illustration.
Øvelse: Prøv at lave regnestykket 5,4 + 3,8 ved at bruge 2 linealer som de to tallinjer.

Subtraktion illustreret / forstået som bevægelse langs tallinjer:
Forstås a og b som beskrivelser af bevægelser langs tallinjer så kan **a - b forstås som en beskrivelse af den sammensatte bevægelse: a fulgt af bevægelsen b langs en modsat rettet tallinje.**

Eksempel: a – b = 3 - (-4,5) = 7,5 :



a foretages langs en sædvanlig '+1 tallinje' mens b foretages langs en tallinje, der har modsat retning, dvs. langs en '-1 tallinje', der har samme enhed som '+1' men har retning modsat – dvs. mod venstre.

Øvelse: Bestem 3 – 4,5 via ovennævnte illustration.

Øvelse: Prøv at lave regnestykket 5,4 - 3,8 ved at bruge 2 linealer som de to tallinjer.

<u>Et lille indskud om de 3 slags minus:</u>

<u>1. Negative tal:</u> Ex -3, -17,23, -28/3, $-\sqrt{29}$.

Hvis vi står ved 0 og har næsen vendt i retning af tallinjens positive retning, svarer de negative tal til, at **vi går baglæns**.

Vi kan også sige, at vi bevæger os **modsat tallinjens positive retning**.

<u>2. Regnetegnet / kompositionen minus:</u> ex a – b .

Ved minus **vendes tallinjen om** – jvf vores definition.

Vi skal gå som b beskriver men **ad en tallinje rettet modsat den normale retning**.

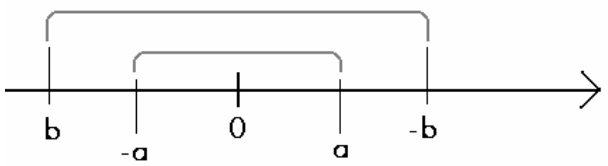
<u>3. Modsat tal:</u>

a's modsatte tal betegnes –a.

-a er a spejlvendt om 0 .

specielt opfyldes: a + (-a) = 0

altså at et tal + dets modsatte er 0.



Ex: 3's modsatte tal betegnes –3 og (–3)'s modsatte tal betegnes –(-3).

Da summen af et tal og dets modsatte er nul fås, at 3's modsatte tal, -3, er det samme som det negative tal -3, mens (-3)'s modsatte tal, -(-3), er det samme som det positive tal 3.

I forhold til bevægelse: -a svarer til a blot i modsat retning.

Vi kan samle erfaringerne om de 3 slags minus i følgende regel:

Et minus vender 'bevægelsesretningen'.

Med denne sætning kan vi argumentere for nogle af de sædvanlige regler omkring minus, som fx:

a - b = a + (-b)

-(-b) = b

a - (-b) = a + b

a -(b + c - d) = a - b - c + d

Øvelse: Prøv at argumenter for nogle af ovenstående regler ud fra reglen om at et minus vender bevægelsesretningen.

Multiplikation illustreret / forstået som bevægelse langs tallinjer:

Hvor havner vi efter a skridt af typen b?

NB: af typen b ; ikke af længden b! b kan også være negativ.

Vi opererer med 2 sæt tallinjer: En tallinje med grundenheden og en tallinje med enheden = b placeret så nulpunkterne koordinerer.

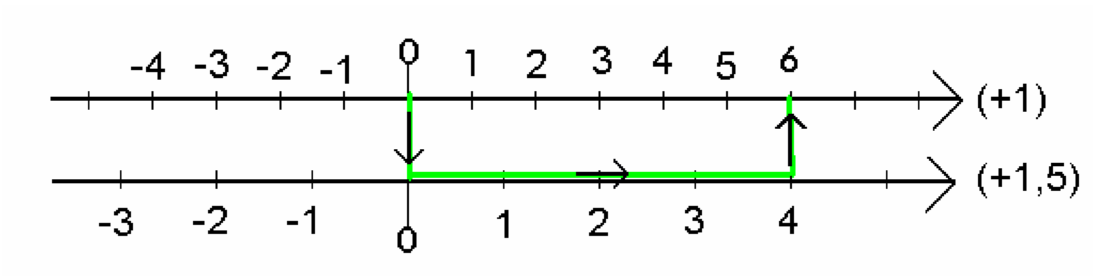
En sådan b-tallinje giver sig selv for b positiv.

For b negativ svarer den til tallinjen for –b (eller |b|), blot pegende i modsat retning.

b = 0 giver ingen tallinje, men "0-tallinjen" kan evt. forstås som bestående af nulpunktet.

a·b svarer til beskrivelsen af den bevægelse på enhedstallinjen, der svarer til a på b-tallinjen - et skridt på b-tallinjen svarer jo til at tage b en gang.

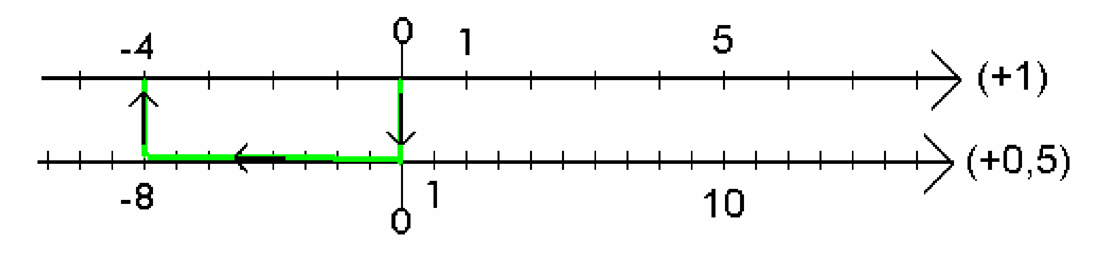
Eksempel: a · b = 4 · 1,5 (4 skridt af 1,5) = 6



Øvelse: bestem ud fra ill. 3 · 1,5 = ? og 2 · 1,5 = ? og -2 · 1,5 = ?

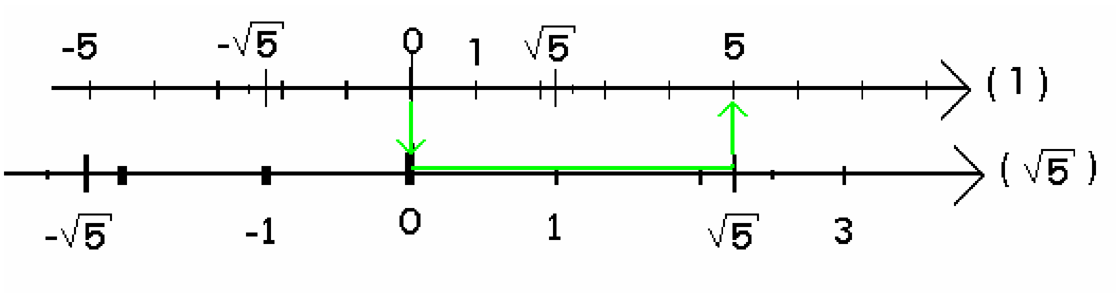
Er b lille er skridtene små (få store skridt kan nemt være længere end mange små skridt):

Eksempel: -8 · 0,5 = -4



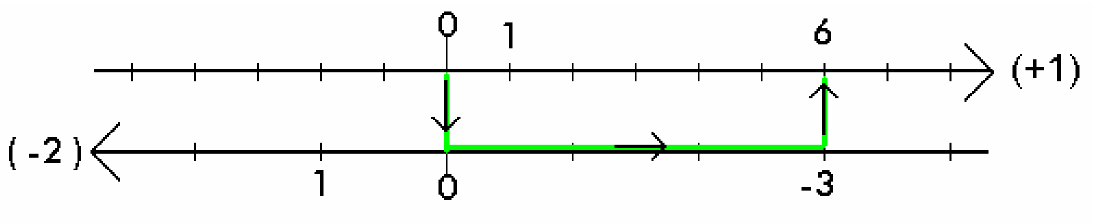
Øvelse: bestem 10 · 0,5

Man kan i billedbehandlingsprogrammer strække tallinjen vandret i et ønsket forhold. Her et eksempel med $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$



Øvelse: bestem $-\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$

Minus gange minus giver plus: (-3)·(-2) = 6

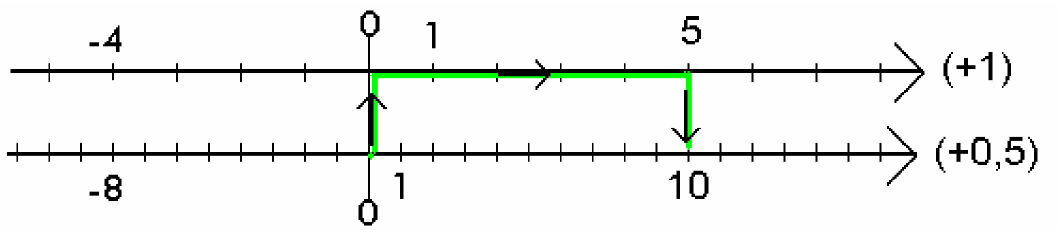


Når tallinjens retning er 'omvendt' svarer den negative retning til den normale tallinjes positive retning.
(eller vender vi næsen mod venstre og går baglæns bevæger vi os faktisk mod højre)

Øvelse: bestem 2 · (-2)

Accepterer vi en 'nultallinje' som bare nulpunktet kan fx 3 · 0 = 0 forstås som, at vi tripper tre gange oveni nulpunktet.

Division illustreret / forstået som bevægelse langs tallinjer:
Hvor mange 'b-skridt' skal der til at erstatte et 'a-skridt'.
Vi opererer også her med 2 sæt tallinjer: En tallinje med grundenheden og en tallinje med enheden b placeret så nulpunkterne koordinerer.
a:b svarer til beskrivelsen af den bevægelse på b-tallinjen, der svarer til a på enheds-tallinjen - et skridt på b-tallinjen svarer jo til at b er gået op netop en gang.
Eksempel: 5:(0,5) = 10

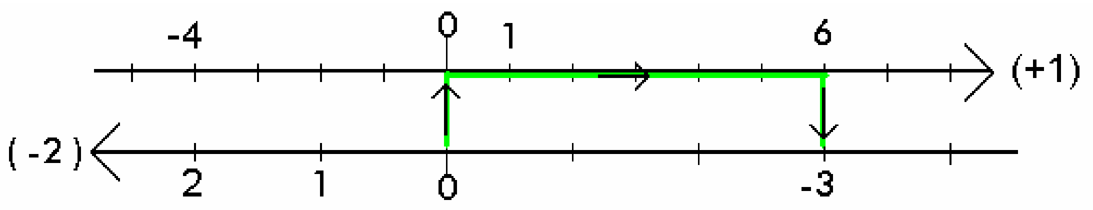


Metoden er god til at illustrere, at dividerer man med et lille tal får man et forholdsmæssigt stort resultat (og dividerer man med et stort tal går det op et lille antal gange).
Øvelse: Bestem -4 : 0,5

Første del av denne artikkelen sto på trykk i Tangenten 1/2003

Gange og division er jo hinandens omvendte regningsarter så:

6 : (-2) = -3



Øvelse: Bestem -4 : -2

PS: De fleste af de almindelige regler for regning med tal kan i øvrigt rimeligt begrundes indenfor modellen.

Første del av denne artikkelen sto på trykk i Tangenten 1/2003