

Kalkulatoren er kommet for å bli i skolen.

Hvordan blir den brukt og hvilket potensiale ser vi for bruk av denne regnemaskinen i norsk skole? Dette er noe av det som diskuteres i dette tenaheftet av Tangenten.

I rapporten fra LAMIS' første sommerkurs i 1998 sa Helge Flakstad at han slo et slag for bruk av ordet kalkulator i stedet for lommeregner fordi det ikke er mange mennesker som regner i lomma. Runar Baune omtaler i artikkelen «Et tilbakeblikk til en pionertid» noe av diskusjonen rundt begrepsbruken og hvordan de kom fram til å bruke lommeregner.

I dag brukes fortsatt begge begreper. Maskinen har et lite, portabelt format som gjør den enkel å ha med og enkel å bruke. Til tross for liten størrelse kan maskinen i dag ha stor regnekapasitet. Lommeregner er et norsk ord og gir en enkel ide om størrelse og funksjon. Kalkulator mer internasjonalt brukt og på den måten en innarbeidet term uten at formatet er nevnt eksplisitt.

Diskusjonen om begrepsbruk vil nok fortsette; i dette heftet brukes begge.

I grunnskolen er det fortsatt den relativt enkle regnemaskinen som er i bruk. I videregående skole brukes grafisk kalkulator som har vesentlig større muligheter, men som dermed også har en høyere terskel for bruk. Det gir andre peda-

gogiske utfordringer å ta denne i bruk på en måte som gir muligheter for utforskning og eksperimentelle utfordringer innen et stort matematikkpensum. En vesentlig fordel med grafisk kalkulator er at hele regneuttrykket står i vinduet også etter utregning. Dette gjør at man har mulighet for å gå tilbake for å kontrollere talluttrykket som blir skrevet inn. Muligheten til å rette eller endre talluttrykket gjør at en ny utregning skjer raskt og med få tastetrykk. Det åpner for enklere å korrigere regnestykket eller å eksperimentere med tallene. Noen av oss som arbeidet i skolen da kalkulatoren ble innført, merket hvor vanskelig det var å argumentere mot tallsvaret som lyste i vinduet, selv med åpenbare feiltrykk. Det er ikke alltid enkelt å få elever til å taste regneuttrykk på nytt. I den senere tid har det kommet relativt enkle kalkulatorer med muligheter for å få to linjer i vinduet og i tillegg med mulighet for å skrive brøkstykker slik de skrives i kladdebøkene.

Det vil være til god hjelp hvis denne type kalkulatorer blir vanligere i bruk i grunnskolen.

I dette heftet har vi forsøkt å få fram flere sider ved bruk av kalkulator. Eksempler er hentet fra mange trinn i grunnskolen. Det er ikke tatt med eksempler fra videregående skole med symbolsk eller grafisk kalkulator. Artikler om

dette har ikke kommet til redaksjonen i tide. Vi håper å komme tilbake med artiklene i senere nummer av Tangenten.

I heftet skriver Bjørn Smestad om historisk utvikling av regnehjelpemidler og det er sett på ulike bruk av lommeregneren ved spill og ved eksperimentering av kvadratrøtter. Olof Magne har hentet eksempler på hva kalkulatoren kan bety for elever med lærevansker og Frode Haara skriver om hva bruk av kalkulator i undervisningen gjør med elevenes valg av arbeidsmetode; særlig innen hoderegning.

Det er en stor utfordring for lærere å gå fra en tradisjonell matematikkundervisning der de tillatte hjelpemidlene er papir og blyant, med passer og linjal i geometri, og til en undervisning der kalkulatoren er noe mer enn et hjelpemiddel ved utregninger. Intensjonene i L97

synes å være at kalkulatoren ikke bare skal brukes tilfeldig eller som et redskap, men være noe som kan bidra til å forstå matematikk. Mye tyder på at lærere trenger bevisstgjøring og opplæring for å kunne realisere dette. Hvordan møter skolen og lærerutdanningen disse tekniske og didaktiske utfordringene?

Jeg håper du som leser vil få glede av heftet. En stor takk til Tangentredaksjonen og spesielt Toril Eskeland Rangnes som har vært en god samarbeidspartner underveis.

Toril Eskeland Rangnes

Bruk av lommeregner i skolen

Noen regnet med stor motstand fra lærerhold da lommeregneren skulle innføres allerede i 2. klasse. På enkelte etterutdanningskurs har lærere blitt satt i grupper der de skulle ha ulike roller, en som forsvarte bruk av lommeregner, en som var motstander og to som ikke helt skulle vite hva de mente. Konklusjonen etter gruppediskusjoner var ofte at det var mye lettere å finne argumenter for enn mot bruk av lommeregner i grunnskolen. Så her har det skjedd en klar endring i holdning siden lommeregneren ble innført for første gang i ungdomsskolen for en del år tilbake. Problemet har heller vært at mange lærere aldri har fått opplæring i hvordan en kan bruke lommeregneren pedagogisk. Derfor blir bruken av lommeregner begrenset mye og ofte til et redskap for fort å få ut et svar.

En kan se på bruken av lommeregneren på tre ulike måter i skolen.

- 1) Lommeregneren er en autoritet. Eleven kan sjekke om han/hun har regnet rett ved å bruke lommeregneren.
- 2) Lommeregneren er en «forsterker» i matematikkutviklingen fordi eleven kan bruke mer tid på problemløsning da lommeregneren kan gjøre rutinearbeidet. En kan gjøre flere oppgaver fordi en slipper å bruke tid på lange utregninger.

- 3) Lommeregneren er en «reorganisator» Det vil si at den snur opp ned på vante måter å organisere/tenke matematikkinnlæring på. Matematikkpensum vil endres, mindre drill og faste algoritmer, mer utforskning og utprøving av nye ideer. Intuitiv tenkning og prøve-og-feile-metoden oppmuntrer.

Alle tre måtene å bruke lommeregneren på kan være nyttig. Galt blir det dersom en blir ensidig i bruken, for eksempel bare bruker lommeregneren som autoritet. Det fører fort til et syn på matematikken som noe absolutt, en samling sannheter som bare er der. Denne bruken oppmuntrer ikke til et fagsyn som sier at matematikk er noe mennesker i sosiale sammenhenger har skapt, noe som er blitt til gjennom hypoteser, utprøving, diskusjoner og revidering av tanker. Dersom vi ønsker at elevene skal oppleve og få det siste presenterte fagsynet, må lommeregneren brukes slik at den fremmer diskusjon, skaper behov for forklaringer, oppfordrer til hypoteser og testing av disse. Dette forutsetter at læreren også vet en del om lommeregnerens muligheter og begrensninger og kan bruke den kreativt i klasserommet. Det er altså ønskelig med en bruk som kan være til hjelp når elevene skal bygge opp begreper i matematikk. På denne måten kan elevene oppleve at matematikk er mer enn rette svar.

Pea (1987) belyser IKT som forsterker eller

reorganisator. Vil innføring av tekniske hjelpemidler føre til en annerledes matematikk eller et annerledes pensum eller vil det bare brukes for å drille inn pensum som en alltid har hatt? Har lommeregnerens inntreden hatt noe å si for L-97? Etter min mening både ja og nei. Hvilke emner som skal læres har kanskje ikke endret seg så mye, men vektleggingen har endret seg. Det står nå at en skal legge mindre vekt på algoritmeinnlæring og at det for eksempel er viktigere å forstå begrepet multiplikasjon og vite når det skal brukes, enn å kunne gange-tabellen. Dessuten har overslagsregning og hoderegning fått en noe større vektlegging i L-97. Altså ser vi i planen en forskyvning i vektlegging på begrepsinnlæring og tallforståelse framfor teknisk algoritmelæring. Hvilket utslag dette får i praksis gjenstår å se. Selv om alle nå vet at elevene får bruke lommeregner på eksamen, er det mange som bekymrer seg over at elevene ikke automatiserer algoritmene, mens andre igjen er lettet over at de slipper å bruke så mye tid på denne biten. Alle som har jobbet i barneskolen vet hvor mye tid og strev det går med for lærer og elever for at elevene skal bli trygge på algoritmer som mange ikke forstår. Nå kan denne tiden, etter min mening, brukes til mer interessante ting i matematikken, og det nye kan, forhåpentligvis, bidra til å gi en annen metalæring om matematikk.

Læreplanen og IKT

Læreplanen har flere momenter om IT og under dette regner en lommeregneren som et av flere elektroniske redskap. Under prinsipp og retningslinjer for opplæringen i grunnskolen i L-97 (side 78–79) står det:

Opplæringa skal medverke til at elevane utviklar kunnskap om, innsikt i og holdningar til utviklinga av informasjonssamfunnet og informasjonsteknologien. Eleven bør utvikle evne til å kunne nytte elektroniske hjelpemiddel og medium kritisk

og konstruktivt og som praktisk reiskap i arbeidet med fag, tema og prosjekt.

Videre kommer det under arbeidsmåter i matematikkfaget (side 155): *Det er viktig at elevene får møte flere av teknologiens ansikter, og at de blir fortrolig med maskinene som redskaper styrt av mennesker.*

Under felles mål for faget: *at elevene stimuleres til å bruke sin fantasi, sine ressurser og sine kunnskaper til å finne løsningsmetoder og –alternativer gjennom undersøkende og problemløsende aktiviteter og bevisste valg av verktøy og redskap.*

Mål for småskolesteget, 1.–4. klasse:

Elevene skal bli fortrolig med å bruke enkle elektroniske hjelpemidler.

2. klasse:

– eksperimentere med tall og symboler, undersøke regneoperasjoner og gjøre utregninger ved hjelp av lommeregneren og for eksempel data-programmer.

3. klasse:

– ... Arbeide med sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon og bruke lommeregner og for eksempel informasjonsteknologi til å utforske regneoperasjoner

– øve seg i å vurdere og kontrollere svar på forskjellige måter

4. klasse:

– arbeide med å utvikle varierte metoder ved hoderegning. Samtale om tenkemåter. Bruke lommeregner og for eksempel informasjonsteknologi til å utforske regneoperasjoner og til beregning.

Mål for mellomtrinnet, 5.–7. klasse:

Matematikk i dagliglivet: ... bli fortrolig med å bruke hensiktsmessige hjelpemidler, spesielt lommeregner og datamaskin.

Tall: ... De skal forstå og kunne bruke de fire regningsartene, vurdere hvilke operasjoner som er aktuelle i hver enkelt situasjon, lære å velge regnemetode og teknisk redskaper og kunne utføre beregninger i hodet, på papiret eller med lommeregner.

5. klasse:

– Øve på variert bruk av lommeregner og undersøke lommeregnerens muligheter og begrensninger.

6. klasse:

– regne videre med lommeregner. Arbeide med å utnytte sammenhenger mellom regnearter og få trening i å velge og bruke regnearter, ulike metoder og hjelpemidler, f. eks. informasjonsteknologi, til å løse problemer og undersøke situasjoner

– undersøke tall og utforske tallmønstre ved hjelp av lommeregner og datamaskin, oppdage og beskrive egenskaper.

7. klasse:

– arbeide videre med hoderegning, med å multiplisere og dividere i hodet og på papiret, regne med lommeregner og arbeide med å vurdere siffer og desimaler i svar.

– trene på å velge og bruke regnearter, metoder, hjelpemidler og redskaper, f. eks. informasjonsteknologien, til å løse problemer og utforske situasjoner. Bruke forskjellige metoder til å vurdere resultater og svar

– vinne erfaringer med kvadrering og kvadratrot – bruke lommeregner

Mål for ungdomstrinnet, 8.–10. klasse:

Matematikk i dagliglivet:

... Elevene skal ha kunnskap om bruk av IT-hjelpemidler og etter hvert kunne vurdere

hvilke hjelpemidler som er egnet i den enkelte situasjon.

8. klasse:

– videreutvikle hoderegning, skriftlig regnemetoder, bruk av lommeregner og informasjonsteknologi, arbeide med framgangsmåter, planlegge utregninger, gjøre overslag og vurdere rimelig presisjonsnivå

Vi kan sammenfatte det læreplanen sier en skal arbeide med i forbindelse med lommeregner i fem hovedpunkt:

Eleven skal

- vurdere når en har bruk for lommeregneren
- bruke lommeregneren som redskap til utregning
- undersøke muligheter og begrensninger
- vurdere svarene en får
- bruke lommeregneren til utforskning av for eksempel sammenhenger mellom regneoperasjoner, begreper og tallmønstre

Dette er i overensstemmelse med de tre måtene å bruke lommeregneren på som omtales innledningsvis. Når en så vet at lommeregner frister mange barn til å eksperimentere, gjøre oppdagelser og samtidig kan gir dem en opplevelse av mestring, kan hjelpemiddelet være et verdifullt verktøy i matematikkundervisning.

Referanser

Pea, R.D. (1987) Cognitive technologies for mathematics education. In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*. (pp. 89–122). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers

Det kongelige kirke-, utdannings- og forskningsdepartement, (1996) *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter

Olof Magne

Kalkulatorn och eleverna med särskilda utbildningsbehov

När jag bläddrade i min just utkomna bok *Literature on special education needs in mathematics* med omkring 4 500 referenser hittade jag bara 21 bidrag om undervisning med kalkulator. Alltså: ett svagt intresse! Det kan jämföras med 64 publikationer om datorer och minst tusen referenser om de fyra räknesätten. Själv har jag rekommenderat att elever med «vansker» i matematik ska upphöra att lära räkneuppställningarna och helt koncentrera sig på olika former av huvudräkning och kalkulatorräkning.

Min motivering: Av de flera tusen svaga elever som jag under årens lopp testat, har nästan ingen lyckats bli en god räknare trots nioårig drill av tusentals räkneuppställningar. Denna drill har tagit i anspråk en stor del av skolans matematikundervisning utan att ha gett eleverna någon i praktiken användbar färdighet.

De undersökningar som jag känner till antyder att också de svaga räknarna på ett fåtal lektioner lär sig enkel kalkulatorräkning. De blir alltså skickligare i att räkna än de någonsin var med uppställd räkning. I grunden kan de också bli rätt skickliga i den räknetyp som jag kallar halvskriftlig räkning och som Marit Johnsen Höines skrivit så vackert om i sin *Begynneropp-läringen*.

Jag vill ge några exempel. Det är

specialläraren Helmut Rühle som observerar tre begåvningshandikappade elever.

Salih

har specialundervisning och i årskurs 3 lär han för första gången känna kalkulatorn. Han kommer från Albanien och där fanns ingen kalkulator. *Den lille professorn* jobbar han i början med. Det är en mikrokomputer i fickformat (lommeformat) och den har jag ansett vara till god nytta, inte minst för invandrarelever. Den ger Salih uppgifter på olika svårighetsgrad. Han får en uppgift, och den löser han lätt på kalkulatorn, och så jämför han med Lille professorn. Gör han fel så meddelas detta och han får göra ett nytt försök. Efter tredje felet får han rätta svaret.

Redan efter ett par dagar behärskar Salih båda apparaterna. Visst behövde han en kort instruktion, men därefter klarar han sig med bara tillfällig hjälp. Liksom de övriga barnen i specialundervisningen kan Salih utan hjälp skriva tal på apparaterna och till och med öva addition och subtraktion. Han har lite svårt med talorden tolv, tretton etc som ju inte skiljer på tiotal och ental.

Nu är Salih i årskurs 4 och han är fortfarande förtjust i Lille professorn. Han använder kalkulatorn för att kolla sina uträkningar. Dessutom har han kalkulatorn som normalt räkneredskap och klarar den bra

inom ramen för sin förmåga. Vanlig uppställd räkning har han ingen som helst chans att klara.

Daniella

går i årskurs 7 och har börjat specialundervisning i matematik. Hon har mycket svårt för matematik. I skriftlig subtraktion missar hon alltid tiotalsovergång. Det är nästan lika svårt i addition. Fingerräknande hjälper henne att klara tabellkombinationerna. Hon är «glömsk» i fråga om ett-plus-ett och ett-gångar-ett. Hennes tidligare undervisning var säkert dålig. Hon har aldrig fått försöka att använda tankeprinciper utan allt var baserat på drill och mekaniska procedurer. Hennes räknelära hade övningar för andra och tredje året. Hon saknar självförtroende i matematik. Själv önskar hon inget hellre än att ha samma räkneböcker som kamraterna. Hon har aldrig använt kalkulator i skolan.

Specialläraren introducerade kalkulatoren. Det visade sig att Daniella hade en sådan hemma och brukade räkna hemtalen med den. Det trodde hon var förbjudet och skämdes för att hon använt den. Vidare försökte specialläraren låta henne följa kamraterna i största möjliga utsträckning. Det gick förvånansvärt bra eftersom hon tilläts ha kalkulatoren. Vanliga uträkningar klarade hon, till exempel medelvärdesberäkningar och procentuppgifter. Det hände en gång att hon var den enda i klassen med rätt svar. Hennes logiska förmåga var outvecklad så hon hade svårt för komplexiteterna. Så länge hon höll sig till vardagsproblem gick det hyggligt. Till följd av dessa framgångar ökade Daniellas självförtroende och hon ville därför självmant reparera kunskapsbrister från tidigare år, till exempel i huvudräkning och tabellkunskap.

Mehmet

hade börjat specialundervisning i matematik först i åttonde året. Mehmets svårigheter be-

rodde mest på hans svaga språkkunskaper. Han behärskade räkneuppställningarna förhållandevis bra. Kalkulatoren fick han för att kolla den vanliga räkningen. Hemma fanns ingen kalkulator. Mehmet hade aldrig använt en sådan. Eftersom han någorlunda behärskade grunderna i uppställd räkning och var säker i tabellerna, men delvis missade text-uppgifterna, uppmanades han lösa de senare med kalkulatorns hjälp. På så vis fick han tillfälle att «öva» ett större antal textuppgifter. Hans svårigheter bestod knappast längre i räkneteknik utan i att korrekt förstå och uppskatta svarets rimlighet.

Hans förtroende för kalkulatoren var nästan obegränsat – tyvärr. Den är felfri, sa han. Uppskattning av svaret och överslagsräkning fann han helt onödiga. Tydligt hade han suggererats till att mekaniskt lita till räknevanor och automatik i lösningsmetoderna. Således fäste Mehmet ingen uppmärksamhet vid hur nollor och decimaltecken betedde sig. Specialläraren ägnade sig huvudsakligen åt att låta Mehmet upptäcka tankeprinciper, till exempel räknelagar och möjligheterna i logiska resonemang. Han fick tänka ut vad han borde göra i en autentisk situation. Halvskriftlig räkning gav viktiga inlärningsresultat. En annan metod innebar att Mehmet skulle förutsäga en problemlösning. Han skulle planera vad han skulle utföra och först därefter ge sig på uppgiften.

Mehmet är nu i årskurs 9. Kalkulatoren är hans fasta arbetsverktyg. Vid behov kontrollerar han räkneuppställningar. Han använder de flesta knapparna, inklusive rottangenten som vid räkning med Pytagoras sats. Procentknappen undviker han. Minnesfunktionen är han osäker på och gör omständliga deluträkningar. Han redovisar gärna i halvskriftlig form.

För Mehmet är kalkulatoren viktig. En statussymbol. Mehmet siktar till att komma in på

yrkesprogram i gymnasieskolan och säger att man då måste vara bra på kalkulatoren: «Alla snabbköp har ju räknemaskiner och så är det i alla jobb som man får».

Refleksjoner om räkneförmågan

Ett viktig mål for behandling av tal och størheter är elevernas utveckling av *räkneförmågan*. Räkneförmåga representerer en mycket kompleks personlighetskvalitet.

Om også «räkneferdighet» är en viktig del av räkneförmågan, kan inte räkneförmågan reduceras till en mekanisk ferdighet, utan omfattar aktiviteter, erfaringer, tankekonstruksjoner, mønstre og strukturer i umgængen med tal og størheter.

Räkneförmågan förändras med tiden. En gång var det nødvendigt att hålla all kunskap i huvudet og med hjælp av långtidsminnet utföra alla praktiske beregninger. Med den ökande tilgængen av papper introducerades räkneoppstillingerne, og de blev tilgængelige i folkundervisningen i Norden under 1800-

talets senere hælft. Kalkulatoren intrædde i skolematematikken for omkring 30 år sedan. I skolen lever de ældre metodeerne kvar, medan den nye tekniken helt erovret affærlivet. Det er alltså en konservativ efterlæpning på godt og ont som karakteriserer skolen.

Det skriftlige ræknandet forlora otvivelaktigt sin betydelse, særskilt for de svage eleverne. Men hovedræknungen består som vigtigt. Sækrare hovedrækning er i selve verket en nødvendig forutsetning for at kalkulatorrækning inte blir en blind ferdighet.

Mycket behöver ändras. Forsknings- og utvecklingsarbejde krævs for at visa hur lærere og elever ska umgås med kalkulatoren. *Ræknelærerne måste skrivas om helt*. I stort sett bør øvningerne med rækneoppstilling forsvinna og ersættes med aktiviteter som ger eleverne insigt i kalkulatorrækning. Eleverne får økad tid for problemløsning. Rækneoppstillingerne får bli frivilligt stoff.

Læs gärna *Spesialpedagogikk*, temanummer om matematikkvansker (Nr. 3, 2001).

Olof Magne

Literature on Special Educational Needs in Mathematics

Boka presenterer om lag 5000 publikasjoner som omhandler svakt presterende/ytende i matematikk. Den dekker tidsrommet 1886 til 2000.

Dette er langt mer enn en liste over spesialpedagogiske arbeider innen matematikk. Olof Magne høster her av sin store kunnskap innen emnet, og setter publikasjonene inn i en sammenheng. Boka finnes i sin helhet på internett, den kan leses eller lastes ned fra adressen <http://www.lut.mah.se/pedinst/specialped.html>

Dette er en viktig bok! Den bør derfor ha interesse, ikke bare for spesialpedagoger, men for alle som underviser i matematikk.

Toril Eskeland Rangnes

Lommeregner i småskolen?

«Du Toril, når jeg tar $5 - 12$ så blir det ikke 0, men $-7!$ »

Utsagnet stammer fra Trond, den gangen seks år, mens han lekte med bestefarens lommeregner for ti år siden. Denne kunnskapen konsoliderte seg slik at da han gikk i 2. klasse og elevene ved en trykkfeil fikk et tilsvarende regnestykke, kom han i konflikt med resten av klassen fordi alle de andre mente svaret måtte bli 0. Resultatet var at læreren måtte inn og forklare om negative tall til syvåringene. En tilsvarende oppdagelse gjorde han på samme tidspunkt om multiplikasjon med 0. «*Uansett hvor mange tall jeg ganger sammen blir svaret 0 dersom jeg ganger det med 0 også!*» Dette ble til en lek. Han prøvde å lure alle med vanskelige multiplikasjonsstykker med 0 som en av faktorene. Hva var det som gjorde at seksåringen oppførte seg som en matematiker der han undersøkte, laget hypoteser, testet igjen og prøvde ut hypotesene på en voksen? Var det som Papert (1983) nevnte, at han levde i et mateland med tilgang på materialet og et miljø som snakket matematikk?

Jeg tilhørte vel tidligere den kategorien som mente at lommeregnerne i barneskolen var mer en fare for tallutviklingen til barna enn en kilde til utforskning og oppdagelse. Egentlig var det Trond sin lek som åpnet øynene for meg at

lommeregneren var egnet til mer enn bare lett-vint å finne et svar på et regnestykke. Senere, når jeg fikk bruk for å kunne mer om den enkle lommeregneren, oppdaget jeg hvor lite jeg egentlig kunne. Jeg hadde aldri fått opplæring i lommeregnerens finesser, og hvor mange er det av oss som setter seg ned og studerer bruksanvisningen til en ny lommeregner? Ved hjelp av gode kollegaer fikk jeg oppdage at lommeregnerne ikke fungerte likt, at en kunne trykke C-tast for å fjerne siste inntastet tall, at dersom jeg trykket to regneoperasjoner etter hverandre var det den siste som gjaldt, osv. Denne kunnskapen hjalp meg til å utnytte lommeregneren bedre og få kjappere strategier ved utregning.

Fra et forsøk med lommeregner på småskoletrinnet

Etter det jeg vet har det ikke vært gjort systematiske undersøkelser og utviklingsarbeid om bruk av lommeregnerne på småskoletrinnet i Norge. Forskning er gjort med større barn og innen spesialundervisning.

Perks (1995) har skrevet fra et forsøk i engelsk skole med lommeregner i bruk blant de yngste elevene (6–7 år). Barna hadde alltid tilgjengelige lommeregnerne i klasserommet og lommeregneren ble et naturlig leketøy blant elevene. Den kunne selvsagt brukes som lommeregner, men også brukes som blant annet

mobiltelefon i leken. Elevene eksperimenterte på egen hånd på lignende måter som Trond, og oppdaget blant annet de negative tallene, eller de fikk mer styrte oppgaver av læreren slik at de lærte lommeregneren bedre å kjenne. Blant annet ble konstantfunksjonen mye brukt, blant annet til telling, både telling med en om gangen og telling med flere om gangen. Multiplikasjon som gjentatt addisjon forstod de lenge før multiplikasjon ble innført som emne. Ved deling oppdaget de desimaltallene og forstod at det måtte være den siste klossen som ble delt i enda mindre biter. Det som er viktig her er at barna ofte opererte med konkreter samtidig som de brukte lommeregneren. På den måten ble det en grunnleggende forståelse av at tall hadde med virkeligheten å gjøre. Det er fascinerende å se hvordan så små barn tenker matematisk med hypoteser, eksperimentering og refleksjon og i tillegg klarer å formidle sine forklaringer til hverandre. Negative tall og desimaltall ble noe naturlig som de forholdt seg til.

Jeg vil videre i artikkelen bruke noen eksempler fra Perks (1995) i tillegg til egne opplevelser fra klasserommet for å eksemplifisere hva som kan skje når små barn bruker lommeregner og vise til noen oppgaver med lommeregner som gir nyttige erfaringer med tall.

Hjelp til selvkorrigerings

Tallsymbolene blir svært ofte speilvendt i denne alderen (noe en ikke skal se på som problem og legge for mye vekt på i småskolen). Men barna i undersøkelsen som speilvendte 2 og 5, tok i bruk lommeregner-tastaturet til hjelp og begynte å korrigere seg selv. De visste at to kom etter en og fem kom etter fire, og da kunne de se på tastaturet hva som var rett.

1009 eller 109?

Lommeregneren kan være en god støtte når elever skal arbeide med større tall. Elever i bar-

neskolen vil gjerne skrive 1009 når de skal skrive 109 fordi språket vårt ikke støtter opp om plassverdisystemet. Små barn liker ofte å eksperimentere med store tall og undersøke hvordan disse ser ut. Dette kan de få muligheten til ved å bruke lommeregneren som støtte ved å telle med en om gangen på lommeregneren. Trykker en $1 + = = \dots$ vil en få tellerekka på skjermen. Så kan en telle høyt og se hva som skjer ved tierovergangene.

Som øvingsoppgave kan en si til elevene:

Stopp på 9, tenk på neste nummer, trykk = og sjekk. (Eleven ser at 9 endres til 10.)

Stopp på 59, tenk på neste tall, trykk = og sjekk. (59 endres til 60.)

Når en kommer til 99 vil en få neste tall 100 og så kan en fortsette til 109 og eleven får en opplevelse av hvordan hundreogni ser ut. Selvsagt trenger en ikke starte fra bunn, en kan starte med $98 + 1 = =$. I undersøkelsen til Perks (Perks 1995) viste det seg at elevene i 6-7-årsalderen frivillig tok i bruk lommeregneren til støtte når de var usikre på hvordan tallet så ut. Etter å ha jobbet med øvelsene over begynte de gjerne fra 99 og telte en om gangen med lommeregner til de kom til 109. (Her er det viktig å være klar over at lommeregnerne fungerer ulikt. På noen lommeregnerne vil en måtte trykke $1 + + 98 = =$ for å få tellerekka fra 98. Her ser en at lommeregnerprodusentene har tatt ulike valg, den ene har valgt å følge notasjonsprosedyren og den andre har valgt det muntlige språket som utgangspunkt. Vi kan si «legg en gjentatte ganger til 98». For mange elever og lærere som har vendt seg til skriftlig addisjonsnotasjon vil denne prosedyren virke ulogisk, men kanskje vil den bli mer forståelig dersom en ser sammenhengen med muntlig språk?)

For læreren kan det være greit å være oppmerksom på at her er = tasten en funksjonstast

og ikke et likhetstegn. Lommeregnerens bruk av = tasten kan støtte opp om elevers feiloppfatning av at etter = kommer det et svar og at likhetstegnet ikke nødvendigvis betyr likt på begge sider.

Plassverdisystemet og tierovergang

Eksempel på oppgaver for elever som arbeider med plassverdisystemet (3.–4.-klasse):

Start med et tall, for eksempel 572. Blinken er 100. Du skal først starte med å få 0 på enerplassen, så 0 på tierplassen. Altså ett siffer om gangen skal bli 0 og du starter bak-erst.

Velg gjerne et større tall, for eksempel fire-sifret. Gjør på samme måte som over. Målet er nå å komme til 1000 med færrest mulig subtraksjoner.

Lignende oppgaver kan gjøres med addisjon:

Start med 579. Blink 1000. Start med å få 0 på enerplassen, så tierplassen osv.

For en elev som hadde problemer med plassverdisystemet, ble oppgaven passe utfordrende, han fikk arbeide med store tall og gjorde rask framgang da han så hvilke forsøk som førte frem og hvilke som ikke førte frem. Det var lett å korrigere seg selv etter hvert. Han fortalte stolt etterpå til de som ville høre om de vanvittig store tallene han hadde fått arbeide med. Elever kan ved å bruke lommeregner på denne måten, få hjelp til å oppdage strukturen i deler av tallsystemet vi bruker. Selvsagt er dette bare en av mange tilnæringsmåter.

En annen oppgave er blekkflekkoppgaven:

$$3 + 2 =$$

Her skal elevene lage regnestykker ut fra hva de tror har stått før blekkflekkene gjorde at siffer forsvant. Denne oppgaven fører til ulike vanske-

grad på stykkene elevene lager. Noen laget enkle stykker med to siffer, mens andre brukte tre siffer. Etter hvert kan blekkflekken flyttes slik at sifferene som vises er midt inne i et tall eller i starten av et tall. Eksempel:

$$2 + 3 =$$

En lærer for 6–7-åringer som gjorde dette, forteller: *I found myself listening to explanations of why 2 and 3 did not always make five, except they did, it was the other numbers giving them a one and other versions of carrying.* (Perks 1995, side 187.)

Å bruke lommeregner til å oppdage sammenhenger

Ei jente, Marta, sitter og arbeider med dobling og halvering. Tallene er store for tredjeklassingen, så hun henter lommeregner. Dobbling er greit. Der legger hun til tallet hun skal doble. Så skal hun halvere. Hun ville ikke ha hjelp, dette ville hun finne ut av selv. Men hun lurte lenge på hva hun skal gjøre. Hun må jo ta bort halvparten, men hva skal hun ta bort når hun ikke vet hva halvparten er? Etter 20 minutters grubling sier hun glad og fornøyd: «Jeg kan dele på to, ikke sant?» Hun oppdager sammenhenger mellom regneartene før hun har jobbet med alle regneoperasjonene på skolen.

En annen tredjeklassing, Petter, sitter og regner med knapper. Åtte sirkler. To knapper i hver sirkel – det blir seksten til sammen. Så skal han ha tre knapper i hver sirkel. Han vet det er tre ganger åtte. Han trykker ivrig på tastene og trykker på flere enn tastene $3 \times 8 =$. Læreren spør hva han gjør. «2 ganger 8 er 16. Så legger jeg til 8. Da får jeg 24, sant!» At eleven tenker slik er naturlig, men det som er interessant her er at han bruker lommeregner slik at den støtter opp om hans strategi.

En oppgave som gir muligheter til undersøkelser og hypoteser er om hvilke tall en kan telle med og komme til 100. Går det med to

om gangen? Tre om gangen? Perks (1995) beskriver seksåringer som diskuterer hvorfor de ikke treffer med tre om gangen. Etter hvert er det noen som «oppdager» at de kan telle med 5, så 10, så 50. En ser at han også kan bruke 25. Intuisjonen blir tatt vare på og en får muligheter til å oppdage og gjøre erfaringer som setter tankene i sving.

Svaret du får er avhengig av det du taster inn!

Det er viktig som L-97 sier «*at de blir fortrolig med maskinene som styrt av mennesker.*» Det de taster inn påvirker hva som kommer ut, derfor er det viktig at elevene lærer tallbehandling, hoderegning og overslag. Det å kunne vurdere om svaret som kommer i vinduet er sannsynlig, blir nødvendig. I en klasse i småskolen stolte de blindt på svaret som kom ut. Jeg måtte gjøre noe for å få dem til å forstå at det var lett å taste feil og derfor nødvendig å vurdere svaret. Oppgaver der enkelte av de digitale tallene sees på som bokstaver når de leses opp ned, kan bli et redskap til å se om svaret er rett. Elevene skal taste regnestykker og svaret skal bli ord/navn. Elevene gjorde noen slike oppgaver og måtte innimellom taste flere ganger før de fikk et svar de kunne lese. Slike oppgaver krever ellers lite tankevirksomhet dersom en ikke snur på oppgaven og lar elevene selv lage oppgaver til hverandre der svaret skal bli et ord/navn. Slike oppgaver er utfordrende, elevene kan samarbeide, de må reversere tankegangen fordi en må begynne med svaret, og de kan oppdage eller erfare sammenhengen mellom motsatte regnearter. Jeg ser at slike oppgaver er blitt populære oppgaver på barnesidene på Tekst-TV. Kanskje de har møtt oppgavetypen på skolen?

Eksempel på slik oppgave:

Etter regn kommer ... Tast inn: $343 + 362 =$
Snu lommeregneren på hodet og les svaret.

Konklusjon

Lommeregneren er billig, lett tilgjengelig og kan brukes både til lek og utforskning i tillegg til å forenkle utregningene slik at elevene mer kan konsentrere seg om selve problemløsningen. Lommeregneren kan egne seg til å gjøre oppdagelser, fremme hypoteser, skape nysgjerrighet, den kan være et element i utvikling av begreper og brukes til eksperimentering. Dersom læreren har god kjennskap til lommeregneren kan lommeregneren brukes til å skape refleksjon og bidra til bedre tallforståelse. Men for at elevene skal få brukt lommeregneren på en best mulig måte, er det viktig at elevene får god forståelse for begrensningene og mulighetene. Da kommer hoderegning og overslagsregning inn. Eleven må ha kontroll over hva de taster inn og hva som kommer ut av lommeregneren. Det er altså ikke det samme hvordan lommeregneren brukes. Etter min mening er ikke problemet for mye bruk av lommeregner i småskolen, heller for lite bruk.

Jeg vil slutte meg til et sitat fra Perks (1995, side 192):

There is evidence that calculators can help as a bridge between teaching and learning mathematics with young children but unless teaching takes full advantage of their power they will remain peripheral to learning.

Referanser

- Papert S. (1983) *Dialog med datamaskinen*, Oslo: Cappelen
- Perks P. (1995) Calculators and Young Children: A bridge to number? In Burton & Jaworski (ed) *Technology in Mathematics Teaching* Kent: Chartwell-Bratt, side 173–194
- KUF (1996). *Læreplanverket for den 10-årige skolen*. Oslo: Nasjonalt Læremiddelsenter

Hans-Jørgen Brucker

Eksempler ...

I følge L97 skal kalkulatoren brukes mer og tidligere i skolen enn før. Det var stor motstand mot kalkulatoren da den opprinnelig ble innført i skolen. Tydelig kom dette til uttrykk da den ble obligatorisk på ungdomstrinnet. Mange var redd for at elevene ikke skulle lære å regne selv. Kritikken har vært vesentlig mindre ved innføringen av L97, enda kalkulatoren nå skal brukes fra småskoletrinnet og at eksamen i 10. klasse skal foregå med bruk av kalkulator i hele oppgavesettet.

Hva brukes kalkulatoren til i klasserommene? Jeg har spurt lærere på kurs og mange svarer at de bruker kalkulator der det er et kalkulatorsymbol i læreboka. I en travel hverdag kan det hende at det stopper der. Noen lærebøker er imidlertid kreative i sitt oppgavevalg og har stor variasjon i tilfanget av oppgaver.

Uavhengig av læreverkens presentasjon vil jeg nedenfor gi noen eksempler på oppgaver som kan løses ved kalkulator og som kan gi økt tallinnsikt og samtidig være interessante å holde på med. Det kan også gi ideer til videre undersøkelser.

Eksempelene kan brukes på flere trinn, men passer vel best på mellomtrinn og ungdomstrinnet.

Eksempel 1

a) Målingsdivisjon/gjentatt subtraksjon

Eli har en list på 3,25 meter. Hun trenger en del mindre lister som skal være 0,5 m lange. Hvor mange lister som er 0,5 m kan hun få av den lange listen? Hvor lang er den resten hun sitter igjen med?

b) I L97 for 5. klasse under Matematikk i dagliglivet står det: «*elevene skal ... undersøke lomme-regnerens muligheter og begrensninger.*»

Regneprioritet er et av områdene som gir tydelige begrensninger for kalkulatoren. I studentgrupper har utregning av uttrykket: $2 + 3 \times 5$ gitt forskjellig svar alt etter hvilken kalkulator de har. Hvordan kalkulatoren regner og dermed hvilken strategi man må bruke for at kalkulatoren skal gi det svaret man ønsker er innfallsvinkler til å undersøke muligheter og begrensninger.

Elever kan lage oppgaver til hverandre for deretter å regne dem ut ved hjelp av kalkulatoren. En måte å rette dette mot matematikk i dagliglivet på er å la elevene lage egne regnefortellinger til stykkene sine.

For eksempel: Line skal kjøpe to brød og tre pastillesker. Brødene koster åtte kroner hver og pastilleskene fire kroner hver. Regn i hodet hvor mye Line må betale. Kontroller hele utregningen ved å bruke kalkulatoren.

Når tallene blir mer kompliserte, må elev-

ene notere mellomregninger eller lære seg å bruke minnetastene. Innlæring i bruk av minnetaster krever noe arbeid, men elever som forstår bruken av tastene vil få økt innsikt i virkemåtene og mulighetene til kalkulatoren. De vil også spare tid ved senere utregninger.

Eksempel 2 – Undersøkelser av tall

På mange klassetrinn kan eksemplene under være en utfordring for undersøkelse av tall. På høyere trinn kan oppgavene utvides til mer formelle begrunnelser for svarene.

Bruk sifrene 1, 2, 3 og 4 og løs oppgavene under. Alle sifrene skal brukes en gang i hvert stykke.

$$\begin{aligned} \square \square + \square \square &= 55 \\ \square \square + \square \square &= 64 \\ \square \square - \square \square &= 11 \\ \square \square \times \square \square &= 448 \end{aligned}$$

Gjør svarene så store som mulig:

$$\begin{aligned} \square \square + \square \square \\ \square \square - \square \square \\ \square \square \times \square \square \\ \square \square : \square \square \end{aligned}$$

Bruk de samme sifrene som over, men gjør svarene så små som mulig.

Tilsvarende kan gjøres med 6 bokser isteden for 4.

Eksempel 3 – Kjeder

Start med et tall mindre enn 40. Multipliser enerne med 4 og legg til tierne. Gjenta dette flere ganger.

Eks: Velger 32. Ganger 2 med 4 og legger til 3, får da $2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$. Gjentar dette og får: $1 \times 4 + 1 = 5$, deretter $5 \times 4 + 0 = 20$, deretter $0 \times 4 + 2 = 2$, deretter $2 \times 4 + 0 = 8$, deretter $8 \times 4 + 0 = 32$, deretter $2 \times 4 + 3 = 11$ osv.

Ser at tallene gjentas, prøv f. eks. å starte

med 4. Hva skjer da?

Prøv andre tall under 40.

Eksempel 4 – Ødelagt kalkulator

Hvis kalkulatoren din er ødelagt, slik at du ikke kan bruke gangetegnet, hvordan ville du da regne ut 57×63 ?

Hva hvis tasten for 5-tallet var ødelagt?

Eksempel 5 – Flere kjeder

Velg et tall. Hvis tallet er et partall, så halver det. Hvis det er et oddetall, så gang det med 3 og legg til 1. Gjenta dette mange ganger. Prøv med nye tall. Hva får du?

Eksempel 6 – Fire på rad (spill for to)

Trykk 5 og gangetegn på kalkulatoren. Trykk deretter inn et annet tall og så på likhetstegnet. Hvis svaret du nå får står i tabellen under, setter du et kryss på det tallet. Den første til å få 4 på rad har vunnet.

5	85	0	40	90	20
10	30	98	110	45	60
55	80	105	5	20	75
65	50	120	25	35	115
60	15	70	55	10	20
25	60	15	35	70	100

Eksempel 7 – Partall

Trykk $2 + 2 =$. Beholdt svaret og trykk $+ 2 =$ gjentatte ganger. Fargelegg tallene som kommer på kalkulatoren i rutene under.

Oppgaven kan brukes for større tabeller og som

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

mønstre for gangetabellen.

(fortsettes side 23, høyre spalte)

Runar Baune

Et tilbakeblikk til en pionertid ...

LOMMEREGNEREN EN VEILEDNING FOR UNGDOMSTRINNET (1979)

Mekaniske og elektriske regnemaskiner hadde eksistert lenge på markedet midt på 1970-tallet. Men det var tale om bordmodeller, heller store og tunge og for det meste beregnet på kontorbruk.

Så kom den batteridrevne minikalkulatoren som snart ble allemannseie. Navnet sier noe om den lille hendige størrelsen, den kunne være med i ranselen, og den var billig i anskaffelse. De første hadde et display med lysende tall som slukte strøm. Et problem var at de første utgavene var upålitelige i bruk. Batteriene gikk rett som det var tomme - og da sto man der! Så måtte de settes til ladning for å være klare igjen neste dag.

Det var derfor ikke lett å se noen stor mulighet for disse i skolens matematikkundervisning. At det dessuten var stor motstand mot å ta dem i bruk i det hele tatt, også fra faglige kretser, ga heller ikke visjoner om en stor framtid. Skulle ikke barna lære å regne? Ferdighetene i regning og tallbehandling ville bli redusert, ble det holdt fram. Matematikklærerne måtte ikke svikte faget sitt, osv. Innvendigene var mange og bekymringene for regneferdigheter store – den gangen noen lærere begynte å samle erfaringer med minikalkulatoren i skolen.

For minikalkulatoren var begynt å bli utbredt i hjemmene. Vår holdning var at man ikke kunne lukke øynene og late som om den

ikke eksisterte. Elevene ville ta dem i bruk uansett, med eller uten vår innsats.

Derfor måtte det snarere være en oppgave for skolen å vise hvordan den kunne anvendes på en forsvarlig måte, for nettopp å motvirke svekking av regneferdighetene. Vi tok den samtidige kritikk alvorlig og ville bygge opp en metodikk som ikke skulle gå ut over ferdigheter i hoderegning. På den annen side hadde vi alt gjort en del erfaringer med at lommeregneren kunne utnyttes for å styrke regneferdigheten på del områder.

Det var stort den gang i 1976/77 da vi fikk kjøpt inn 15 slike kalkulatorer med oppladbare batterier til skolen og begynte på egen hånd med forsøk i klassen. På sløyden ble det snekret en elegant kassett med bærehåndtak, for lett transport og for lett å kunne lade dem opp.

Omtrent slik var begynnelsen ved noen skoler i Oslo, (og sikkert andre steder i landet også). Det var intet å finne i lærebøkene i matematikk om hvordan minikalkulatoren evt. skulle brukes i undervisningen. Nettopp denne mangel på læremidler ønsket *Skolesjefen i Oslo* gjøre noe med. Han tok kontakt med fire av oss lærere som var i gang med forsøk. Det kom invitasjon til å utvikle materiell som skulle supplere de vanlige matematikkverkene. Initiativtaker var *Odd Karlsen ved Avdeling for Pedagogisk Utviklingsarbeid*, og de andre var *Tom Hermansen, Ingeborg K. Gleditsch* og *Kjell Mat-*

hisen, foruten artikkelforfatteren, fra skoler i Oslo.

Vår motivasjon for å gå med i dette lærebokprosjektet var dermed dobbelt. Dels å unngå å svekke de elementære regneferdighetene, og dels å styrke matematikkforståelsen der det var mulig. Artikkelen videre vil med noen eksempler søke å belyse dette.

* * *

Andre tekniske regnehjelpemidler var for lengst tatt i bruk i grunnskolen. Man hadde *matematiske tabeller* hvor man kunne slå opp kvadrattall, kubikktall, kvadratrot, osv. Og *regnestaven* hadde lenge vært et «anerkjent» regnehjelpemiddel. Men den var såpass krevende å bruke at det ble et middel kun for de flinke elevene. Sogar betegnet *Mønsterplanen for grunnskolen, midlertidig utgave 1971 (M71)* regnestaven som «nødvendig for å gjennomføre planen ...» (s 123). Der var også en nøye angivelse av hvilke skalaer den måtte ha. Planen ble skrevet i en tid da regnestaven var det vanlige hjelpemiddelet i tekniske miljøer. Den «endelige» planen, *M74*, var mindre detaljert, det kunne brukes «... *regnestav og evt. andre hjelpemidler ved behandling av tall*». Vi mente at en rimelig tolkning av dette, ga adgang til å bruke lommeregneren i skolen.

Motstanden i tiden mot minikalkulatoren i skolen rommet et paradoks. Det var greit å bruke vanskelige tilgjengelige hjelpemidler, men ikke lette. Matematikk og regning *skulle* visst være vanskelig!

Denne skepsisen var ikke ubegrunnet og manet til en forsiktig innføring av minikalkulatoren i skolen. I rundskriv fra *Skolesjefen i Oslo* var forsøkene begrenset til ungdomsskolen. Vår oppgave var å vise hvordan lommeregneren kunne tas i bruk og hvordan den kunne brukes innen en rekke ulike områder av matematikken. Lommeregneren åpnet også for at flere elever kunne få mer trening i problemløs-

ning når selve tallregningen kunne gjøres enkel. Dette ga rammer for vårt arbeid.

Arbeidet i gruppa kom i gang i 1978. Noe av det første vi tok opp var navnet på dette nye regnehjelpemiddelet. «Minikalkulator» var for tungt, mente vi, og smakte på flere andre navn, så som «miniregner», «lommekalkulator», det svenske navnet «reknedåsa», m.fl. Vi ville gjerne ha et enkelt norsk navn og landet på *lommeregner*. Positivt at dette norske navnet fortsatt brukes i dag.

De fire regningsarter

Vi brukte et enkelt symbolspråk med bilde av tastene for å forklare disse operasjonene – i heftet så vel som på tavla. Det er senere blitt den vanlige symbolbruken i bruksanvisninger og mange læreverk.

En enkel teknikk viser hvordan man kunne trene gangetabellen, f.eks. 7-gangen:

Tast $7+=$ og viser 7 i vinduet,
tast så = en gang til og 14 vises,
forsett flere ganger med = og resten av
7-gangen vises.

Slik viste vi at lommeregneren kunne avløse de gamle trykte gangetabellen. Denne hurtige tilbakemeldingen motiverte elevene til læring av tabellene.

Overslagsregning

Det var – og er – en reell fare for at ukritisk bruk av lommeregneren kunne svekke regneferdighetene. Dette forsøkte vi derfor å ta hensyn til i metodikken. Overslagsregning var noe som da måtte vektlegges. Eleven måtte først gjøre et overslag og resultatet skrives ned, *før* de fikk lov til å bruke maskinen. De gjennomgående feilene var *feiltasting*, men dette ble fort avdekket når svaret ble holdt opp mot overslaget. Som kontroll tastet eleven gjerne tallene en gang til på lommeregneren. Brukt slik ville

Oppgaven	Overslag	Rett svar	Abs. feil (A)	Feil i %	Godtatt
	O	R	O – R	(A/R)*100	JA/NEI
3,14×1,67	6	5,2438	0,7562	14.4 %	JA
9,3×12,4	90	115,32	25,32	22,0 %	NEI
218/23	10	osv.			

lommeregneren styrke tallfølelsen og regneferdigheten, snarere enn å svekke den.

Erfaringene våre fra tidligere undervisning var at overslagsregning falt vanskelig for mange elever. Vi oppdaget at lommeregneren var et godt motivasjonsmiddel til å lære seg denne kunsten. Videre, at den ga god hjelp til å trene evnen til å føre denne ferdigheten videre. Nedfor er en oppgavetype fra heftet som kan illustrere dette.

På forhånd skulle eleven velge en ønsket nøyaktighetsnivå: 20 %, 10 % eller 5 %. Til å begynne med valgte de gjerne 20 % nøyaktighet. Se tabellen øverst på siden.

De lærte fort å oppnå større presisjon i overslagene. De vurderte om tallene i oppgaven skulle avrundes oppover eller nedover – og ikke alltid nødvendigvis til et hele tall eller hele tiere, osv. Mange elever kom da fort ned i < 5% feil på flere stykker. Oppgaver av denne type bidro til at elevene våget å skjerpe sine krav til nøyaktigheten i anslagene sine.

Avrunding

Elevene oppdaget fort behovet for avrunding. Svarene på lommeregneren kunne ofte være mangesifret – opptil 8 sifre fikk plass i vinduet.

Her er nøyaktigheten i svaret fra lommeregneren ned på micrometernivå og må rundes av til korrekt antall gjeldende sifre.

Her åpner lommeregneren for det nødvendige i å komme inn på sifferverdier og passende avrunding.

Vårt poeng var – og er – tosidig:

- oppgavene kunne operere med realistiske tall fra f.eks. utførte målinger – og ikke bare forenklede tall for lettere tallbehandling
- bruken av lommeregneren skulle tvinge fram spørsmål om avrunding og gjeldende siffer.

Induktiv metode

Når tallbehandlingen ikke er noe problem, kan det lettere legges opp til induktiv undervisning. Dette var en læringsmåte vi i undervisningen tidligere ofte ikke hadde tid til, men som fagdidaktikken sa vi burde følge. Det er vel etter hvert blitt klassisk i undervisningen å la elevene beregne π utfra måling av omkrets og diameter i en sirkel, for så å dividere omkretsen på diameteren. Dette eksempelet var også med i boka.

Et annet eksempel var å vise Pythagoras' læresetning ved hjelp av lommeregneren.

Elevene tegnet noen ulike rettvinklede trekanter på ruteark. Deretter målte de sidene og førte dem inn i tabellen nedenfor. Så beregnet de den tredje siden på grunnlag av de to andre. Beregningen av den tredje siden ble sammenlignet med målingen av den samme.

Siden $x = 9/2,3 = 3,9130434$ dvs. m

Oppg. nr	Mål sidene			Regn ut			Rund av
	a	b	c	a ²	b ²		
1 osv.	6,6	4,4	7,9	43,56	19,36	7,9322128	7,9

«Sammenlign de beregnede verdiene med de målte *c*-verdiene. Hva finner du? Skriv opp regelen du finner ...»

Også her er lommeregneren et middel til rask regning som gir erfaringer med Pythagoras læresetning og som bidrar til at elevene kan oppdage regelen selv. I boka hadde vi flere tilsvarende eksempler. De forutsetter aktive elever som trekker slutningene selv.

Kvadrering og potensering

Selv om de enkle lommeregnerne vi brukte den gang ikke hadde *x*²-tast, kunne lommeregneren kvadrere og potensere f.eks. 7², 7³, 7⁴:

tast 7 * = og 49 vises i vinduet, tast = en gang til og 343 vises, osv.

Sammensatte uttrykk og minne

Om de enkle operasjoner med to tall langt på vei var «selvinstruerende», så trengte elevene hjelp til større taloppstillinger i f.eks. formelregning (volum, prosent, osv.). Her måtte vi vise at lommeregneren kunne ta serieoperasjoner. Men som innledende trening noterte eleven mellomregninger. Også dette for å sikre regneforståelsen.

Oppgaveeksempel

7*1,25+2= kunne testes og gi svaret direkte, mens

132+42/7= ville gi galt svar,

fordi lommeregneren «tenkte» og regnet slik

(132 + 42) : 7 =

Elevene måtte da lære at multiplikasjon og divisjon var *prioritert* over addisjon og subtraksjon. Følgelig måtte eleven forstå parentesfunksjonen og oppgaven måtte oppfattes slik

$$132 + (42 : 7) =$$

selv om parentesene ikke brukes her.

Skulle lommeregneren brukes i matematikken måtte den også nyttes effektivt. Å anvende minnefunksjonen var noe elevene syntes var vanskelig, og det måtte brukes tid til å lære dette.

I sammensatte uttrykk kunne denne utnyttes. F.eks. i oppgaver av typen

$$3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 =$$

regner man først ut $3 \cdot 4 =$ og 12 legges inn i . Deretter regnes ut $5 \cdot 6 =$ og også dette svaret, 30, legges inn i . Sluttsvaret hentes fram fra minnet ved å taste : 42.

For at elevene skulle skjønne hvordan minnefunksjonen virket, noterte de til å begynne med mellomregningene.

Anvendelser i matematikken

Heftet tar for seg hele *ti* ulike områder av matematikken og viser at lommeregneren finner en naturlig plass der. Prosentregning, valuta-regning, areal/volum/tetthet, beregning innen geometri og funksjoner er noen av dem. Lommeregneren viste seg å være et svært nyttig hjelpemiddel for mange elever.

Særlig på området problemløsning mente vi at bruk av lommeregneren var berettiget. Vi hadde erfaring for at svake elever som ikke behersket de elementære regningsartene, stag-

nerter i sin utvikling. De fikk med lommeregneren motivasjon til å gå løs på oppgaver som de ellers ikke ville ha prøvd seg på. I tillegg medførte en raskere tallbehandling at elevene fikk løst flere oppgaver enn tidligere. På denne måten ble lommeregneren til faglig hjelp for utviklingen av elevenes matematiske tenkning.

Heftet anbefalte at elevene får bruke lommeregneren som *fasit* for å kontrollere at papir- og blyant-regningen er riktig. Dette er vel fortsatt en forsvarlig bruk av hjelpemiddelet.

Vurdering

Vi foreslo også andre prøveformer.

... En totimers prøve kan bestå av to deler. Den første timen kan elevene bruke lommeregneren på den ene delprøven. Den andre timen får elevene den neste delprøven og må greie seg uten regnemaskin ... (s.16)

Samtidig med at heftet ble ferdig, oversendte *Oslo Skoleråd* følgende oppfordring til *Oslo Skolestyre*:

om å be Grunnskolerådet vurdere bruk av lommeregneren ved avgangsprøven. Det er en forutsetning at en del av prøven avlegges uten bruk av lommeregneren
(Uttalelse 79/2)

Ikke lenge etter fikk vi denne todelte prøveformen som her ble foreslått.

Vurdering i ettertid

Heftet vi laget ble ikke brukt lenge i skolen, men mange av ideene det tok opp, ble snart tatt inn i de vanlige læreverkene i matematikk.

Vi hadde utviklet metodikken og heftet etter oppfordring fra Skolesjefen i Oslo. Som frukter av dette arbeidet, ble det åpnet for at alle skolene i Oslo kunne bruke lommeregneren. I det nevnte skrevet fra *Oslo Skoleråd* oppfordres ...

...*Oslo Skolestyre* til å godkjenne bruk av lom-

meregneren i den vanlige matematikkundervisningen i 7., 8. og 9. klasse. ... fra 1979/80.

... [og] ... *I 5. og 6. klasse kan bruk av lommeregneren innføres som forsøk.*

Den teknologiske utviklingen av regnehjelpemidler i perioden etterpå har nærmest eksplodert. Lommeregnerne med LCD-vindu – og etterhvert også solcelle – løste problemet med at batteriene løp tomme. De ble dessuten så billige at de virkelig ble allemannseie. I videregående skole er også lommeregner med *grafisk vindu* blitt «pensum».

Videre har utviklingen av datamaskiner for lengst bragt også regneark som regnehjelpemiddel inn i skolen og i tillegg til andre matematikkprogrammer.

Dette viser at det nytter å engasjere seg som lærer. Det har vært interessant å se tilbake på denne pionertiden og at man faktisk har vært med på å påvirke utviklingen av skolen videre, både ved at lommeregneren faktisk i dag er i allmen bruk i hele skoleverket, og også som hjelpemiddel under eksamen.

Bjørn Smestad

Regneverktøy gjennom historien

Historisk sett er det å foreta utregninger på papir unntaket snarere enn regelen, og det kan sees på som etnomatematikk knyttet til en viss periode i den vestlige verdens utvikling. I den perioden ble det ansett som en klar fordel å være i stand til å regne ut ting på papir, mens det vanskelig kan ha vært noen stor fordel i kulturer hvor papir og liknende var en kostbar mangelvare¹. Og utviklingen går videre: allerede risikerer man hoderysten hvis man antyder ovenfor elevene at de kanskje av og til ikke har en kalkulator i nærheten: Vi har jo kalkulator på mobilen, ikke sant?

Ideen bak denne artikkelen er å kaste et blikk på hva slags regneverktøy som har vært brukt i tidligere tider. Noen utfyllende gjennomgang er det ikke plass for her, jeg vil derfor bare ta deg med på noen dykk ned i historien for å se hva vi finner.

Interessante som de enn er, jeg tar ikke for meg rissing av streker på dyrebein eller registrering av tall ved hjelp av tråder (Perus *quipu*), siden det er *regneverktøy* jeg er interessert i nå. Innretninger for å *oppbevare* tall har en annen historie.

Fingrene

Det mest «nærliggende» regneverktøy må vel være fingrene, og de har vært flittig brukt. Å addere og subtrahere på fingrene er vel mest opplagt, men en metode for å multiplisere to tall

mellom 5 og 10 er også kjent på mange tidspunkter og steder²: Trekk fem fra hvert av tallene. Da får du to tall som er mellom 0 og 5, så du kan vise et tall på hver hånd ved å bøye et antall fingre. Summen av de bøyde fingrene gir antall tiere, mens produktet av de rette fingrene gir antall enere i svaret. Se også artikkel om dette i *Tangenten* nr. 4/1997

Et eksempel: Regn ut $7 \cdot 7$. Vi skal altså bøye $(7 - 5 =) 2$ fingre på hver hånd. Antall tiere blir summen av de bøyde fingrene, altså $2 + 2 = 4$, mens antall enere blir produktet av de rette fingrene, altså $3 \cdot 3 = 9$. Svaret blir 49.

På liknende måter kan man multiplisere tall mellom 10 og 15, mellom 15 og 20 osv. Dette kan jeg imidlertid ikke gå inn på her. For mer informasjon se Georg Ifrah s. 109–112.

Tellesjetonger (*calculi*)

Leirgjenstander er blitt brukt til å registrere tall veldig lenge, men man tror også at de er blitt brukt til å regne. Georges Ifrah skriver om en sumerisk leirtavle fra ca. 2650 fvt som gjengir resultatet av et divisjonsstykke. Stykket ble sannsynligvis regnet ved hjelp av små leirkuler og -kjegler av forskjellige størrelser, som hadde verdier 1, 10, 60, 600, 3600, 36000 osv. Man antar at dette verktøyet ble erstattet av abakus ca. 2000 fvt.

Abakus

Mange kulturer utviklet etter hvert et system hvor den samme markøren kunne bety forskjellige ting alt etter hvor den befant seg. Selve utformingen kunne variere mye: fra perler og skjell som tres på tråder av forskjellige farger (for eksempel hos apachene i Nord-Amerika), steiner, bønner eller mais som plasseres i fordypninger (hos inkaene i Sør-Amerika), sjetonger på bord/brett med markeringer (for eksempel hos grekerne og etruskerne), pinner på et gulv eller bord med ruter (hos kineserne). Vi regner med at alle disse innretningene til å begynne med ble brukt til å representere tall (og som telleverktøy), og at de deretter ble utviklet til regneverktøy.

For mer om abakus se nedenfor og www.ee.ryerson.ca:8080/~elf/abacus/.

Abakus med voks

Som et slags overgangsfenomen mellom abakus og regning på papir er det interessant å se bruk av abakus med voks og abakus med sand. Her tegnet man talltegn i de forskjellige rutene. Vi kjenner eksempler på slike fra romerriket på 500-tallet (evt.), og de var i bruk i mange hundre år.

Kuleramme

Den versjonen av abakus som er mest i bruk i dag, er kulerammen. Fremdeles er det vanlig å se bruk av kuleramme i butikker og regnskapskontorer i store deler av Asia. I tidsskriftet

Beijing Scene kan vi lese at «fjerdeklasselever i kinesiske barneskoler læres fremdeles å bruke kulerammen, selv om mange av de små keiserne – som kunne spille Nintendo før de kunne snakke – protesterer mot de gammelmodige timene. Kulerammeferdigheter er også obligatorisk for å bli regnskapsfører i Kina. Dette er en av de største hodepinene for disse studentene. Deres kulerammeopplæring starter ofte med innlæring av mnemoniske vers som er sjelløse nok til å gi en poet hjerteattakk, men de er likevel brukbare for å få kulerammebrukeren opp i rimelig arbeidstempo.»³

Øverst på sida er et bilde av den klassiske kinesiske kulerammen (suan-pan).

Kolonnene står for (fra høyre mot venstre) enere, tiere, hundrere osv. Kulene over skillet har fem ganger så høy verdi som kulene under. For å markere tallet 127 flytter vi da én enerkule i tredje kolonne (fra høyre), to enerkuler i andre kolonne og to enerkuler og en femmerkule i første kolonne.

For mer om abakus (herunder kuleramme) se www.ee.ryerson.ca:8080/~elf/abacus/ og www.users.dircon.co.uk/~damold/soroban/index.html, som begge har instruksjoner for å addere, subtrahere, multiplisere og dividere på kuleramme.

Napierstaver

John Napier (1550-1617) utga en bok om «rabdologiae» i 1617 – de kalles bare «Napier rods» eller Napierstaver. De reduserer multipli-

kasjon til å finne de riktige stavene og deretter legge sammen tall på korrekt måte. Her ser vi hvordan sekserstaven ser ut, og deretter hvordan man kan regne ut $1615 \cdot 365$:

Regnestav

Regnestaven er basert på logaritmeideen, som ble utviklet av John Napier. Æren for oppfinnelsen av regnestaven gis vanligvis til William Oughtred, skjønt Richard Delamain var den første til å publisere en beskrivelse, i 1630, av en sirkulær «regnestav».

De første regnestavene besto ganske enkelt av et par «linjaler» som gled mot hverandre, men de ble snart videreutviklet, og det som etter hvert ble standardutgaven var den som ble utviklet av Victor Mayer Amédée Mannheim på 1800-tallet. Denne ble standardverktøy for matematikere og ingeniører over hele verden i hundre år.

Med en regnestav kan man multiplisere, dividere, trekke kvadrat- og kubikkrotter og holde på med trigonometriske funksjoner, og nøyaktigheten er i området rundt 3 gjeldende siffer for de vanligste regnestavene (som hadde en lengde på ca. 25 cm – nøyaktigheten avhenger naturlig nok av lengden).

Her lar vi logaritmeideen ligge, og illustrerer bare hvordan vi kan lage «regnestaver» for å addere:

Her er det addisjonen $5 + 3$ vi utfører: vi plasserer den ene linjalen slik at 0 havner vis-à-vis 5 på den andre, så leser vi av hva 3 på den ene ligger vis-à-vis. Svaret er 8. Med hjelp av logaritmeideen kan vi multiplisere på samme måte.

For mer om Napierstaver se www.cut-the-knot.com/blue/Napier.html, som også har et Javaprogram som illustrerer bruken.

www.users.dircon.co.uk/~damold/soroban/livesliderule.html er en veldig enkel Javaregnestav, mens www.sliderules.clara.net/a-to-z/tys/tys-contents.htm er en bok fra 1954 med tittelen «Teach yourself the slide rule».

Sluttkommentar

Vi ser at menneskeheten gjennom historien har hatt mange forskjellige måter å regne ut ting på – helt fram til billiggkalkulatoren gjorde menneskelig utregning overflødig(?)

Referanser

- Gullberg, J. (1987): *Mathematics From the Birth of Numbers*. W.W. Norton.
- Ifrah, G. (1997): *Tallenes kulturhistorie*. Pax.
- Katz, V J. (1998): *A History of Mathematics*. Addison-Wesley
- Swetz, F J. (1994): *From Five Fingers to Infinity*. Open Court.
- The MacTutor History of Mathematics archive (www.groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/)

Noter

- 1 Riktignok må vel også egypternes multiplikasjon på papyruser regnes med i denne sammenhengen. Se www.mcn.net/~jimloy/mult.html for informasjon om en metode som ble mye brukt.
- 2 Og metoden er fremdeles i bruk, også av elever i Finnmarksskoler.
- 3 *Beijing Scene*, Volume 5, Issue 8, May 7–13. www.beijingscene.com/V05I008/index.html.

(fortsatt fra side 15)

Eksempel 8 – Andre undersøkende oppgaver

- a) Ta et tosifret tall, f. eks. 31. Bytt om sifrene, dvs. 13. Finn differensen mellom tallene, dvs. $31 - 13 = 18$. Prøv med andre tall. Hvilket mønster finner du? Forklar resultatet.
- b) Skriv ned tre tall etter hverandre, f. eks. 3, 4 og 5. Gang sammen det største og det minste tallet og gang det midterste tallet med seg selv. Finn differansen mellom svarene du fikk. Prøv igjen med andre tall som følger etter hverandre. Hvilket mønster finner du? Forklar resultatet.
- c) i) Skriv ned tre tall etter hverandre, f. eks. 5, 6 og 7. Legg sammen tallene. Er summen delelig med 3? Gjelder dette hver gang vi tar tre tall etter hverandre? Forklar resultatet.
ii) Prøv det samme med 4 tall etter hverandre. Forklar resultatet.
iii) Prøv det samme med 5 tall etter hverandre. Forklar resultatet.
- d) Regn ut:
 $15873 \times 7 =$
 $15873 \times 14 =$
 $15873 \times 54 =$
 $15873 \times 45 =$
 $15873 \times 28 =$
 $15873 \times 63 =$
Hvilket mønster finner du?
Forklar resultatet.

Dette er en bearbejdet utgave av en artikkel fra Tangenten 3/2000.

Christoph Kirfel

Ta rotta på rota

For mange virker rottegnen på papir og kalkulator som en rød duk eller en magisk ”blackbox” som er umulig å forstå. I tillegg til en teoretisk forståelse av tegnets betydning og bruksområde er det også mulig å eksperimentere seg frem til en innsikt i rottegnen. Den lille kalkulatoren er akkurat avansert nok til å kunne hjelpe oss her.

Noen øvelser vil kanskje hjelpe å få øynene opp for rottegnets betydning:

- 1) Velg et tall, trykk så på rottegnen og deretter på gangetegnet og så på likhetstegnet. Hva skjer? Først gangetegnet så likhetstegnet bevirker at tallet som sto der før operasjonen blir ganget med seg selv (kvadrert). Gjenta forsøket med andre tall.
- 2) Start med et tall, gang med seg selv (se ovenfor) og bruk så rotknappen. Hva skjer? Hva skjer når vi starter med negative tall?
- 3) Start med et tall > 1 , for eksempel 5. Bruk rotknappen, bruk rotknappen en gang til, og så mange ganger etter hverandre. Hva skjer? Hvorfor? Start med et annet tall og gjenta samme prosessen. Forklar det du ser.
- 4) Start med et tall mellom 0 og 1. Trekk rota mange ganger etter hverandre og se hva som skjer. Forklar hvorfor.
- 5) Vi starter nå med et tall i nærheten av 1, for eksempel 1,0008. Trekk rota og følg med tallene du får. Det ser ut som om ”halen”, bak kommaet, blir halvert for hver gang. Forklar! (Hint: Du kan også gå den andre veien, starte med et tall i nærheten av 1 og kvadrere tallet. Da vil ”halen ” bak kommaet fordobles. Kall tallet for $1 + x$, da er kvadratet $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$. Hva kan vi si om x^2 , og hvordan kan vi nå forklare det vi så i eksperimentene?)
- 6) Start nå med et tall like under 1, for eksempel 0,999992. Trekk rota og følg med tallene du får. Det ser ut som om avstanden til 1 blir halvert for hver gang. Forklar!
- 7) Hvordan reagerer din lommeregner når du prøver å trekke røtter av negative tall. Prøv å forklare hvorfor roten av et negativt tall ikke kan være et tall på tallinjen. Tallinjen er delt inn i negative tall, positive tall og tallet null.

Hans-Jørgen Brucker

Spill

Tangenten 2/2001 hadde mange sider om spill der kalkulatoren kunne være et nyttig hjelpemiddel flere steder. I klasserommene der spill og lek er aktuelle temaer i matematikkundervisningen vil kalkulatoren naturlig kunne brukes. Spillene som er nevnt her kan brukes i store deler av grunnskolen med litt endring av tallene eller reglene. Det kan være en utfordring for lærere å se hva som skal til for at spillene kan brukes i nettopp deres klasse.

Alle spillene kan utføres med to deltakere.

Spill 1

- Bestem et intervall for eksempel 25 til 30. Lag summer av to tall der svaret skal være i intervallet. Skriv opp regnestykkene. Gjør dette annenhver gang og lag nye regnestykker hver gang. Fortsett helt til en har rett svar og den andre feil. Gjør deretter det samme med et annet tallintervall.
- Tilsvarende for subtraksjon.
- Tilsvarende for multiplikasjon.
- Tilsvarende for divisjon.

Spill 2

Slå inn 8 siffer på lommeregneren i vilkårlig rekkefølge og med komma på en tilfeldig plass. Eksempel: 4218,6359. Nå skal sifrene fjernes ved at du fjerner 1-tallet først, deretter 2-tallet

og så videre ved å trekke fra. Hvis det ikke er noe 1-tall der, tar du 2-tallet osv. Med tallet som er i eksempelet får vi da: 4218,6359. Vi taster -10 og får 4208,6359. Deretter taster vi -200 og får 4008,6359. For å fjerne 3-tallet må vi taste inn $-0,03$ og får 4208,6059. Slik fortsetter vi til vi ender opp med 0. Den ene spilleren taster inn tallet med 8 siffer og den andre gjør subtraksjonene for å få 0. Når den andre spilleren er ferdig, skal denne spilleren taste inn et tall med 8 siffer. Den som klarer å komme til 0 med færrest regneoperasjoner har vunnet. Hvis tallet er for vanskelig, kan man starte uten komma.

Spill 3

Slå inn 8 siffer som i spill 2. Nå har vi bare lov til å fjerne siffer som står på enerplassen. Det skal gjøres i samme rekkefølge som sist. Eksempel: 4218,6359. 1-tallet står på 10-plassen, derfor må vi taste :10 og får 421,86359. Da kan vi taste -1 og får 420,86359. For å fjerne 2-tallet må vi igjen taste :10 og får 42,086359. Da kan vi taste -2 og får 40,086359. For å fjerne 3-tallet taster vi $*10000$ og får 400863,59. Da kan vi taste -3 og får 400860,59. Slik kan vi fortsette til vi sitter igjen med 0. Som i oppgave 2 skal den ene spilleren taste inn tallet og den andre gjøre regneoperasjonene inntil vi får 0. Så skal den andre spilleren taste inn et tall med 8 sif-

fer. Den som klarer å komme til 0 med færrest regneoperasjoner har vunnet.

Spill 4

Bestem et tall som ganget med seg selv gir 5. Hvem kommer nærmest? Prøv flere ganger med flere desimaler. Slå til slutt inn $\sqrt{5}$ og se hvor langt unna dere var. Den som var nærmest får et poeng. Prøv på nytt med andre tall og se hvem som får flest poeng til slutt.

Spill 5

Mattebingo. En spiller velger to tall i den lille tabellen og ganger de sammen ved hjelp av lommeregneren. Sett kryss over tallet i den store tabellen der du finner svaret. Den andre spilleren gjør det samme og setter ring rundt svaret i den samme tabellen. Fortsett inntil en spiller har fire på rad vannrett, loddrett eller diagonalt. Det er ikke anledning til å sette ring eller kryss i en rute som er brukt før og det er ikke lov til å velge nye tall selv om det skulle vise seg at en spiller får en rute som allerede er brukt. Dette spillet kan tilpasses andre trinn ved å endre tallene. Dette er gjort av lærere på kurs som laget et spill hver og delte med de andre kursdeltakerne på en senere kursdag.

3	40	2,5
0,4	6	0,9
1,5	1,9	0,5

120	7,5	0,45	16	0,36	2,25
1,2	18	5,4	1	11,4	3
4,5	5,7	1,25	2,4	240	0,6
3,75	4,75	1,5	9	0,75	0,95
0,76	0,2	2,7	60	7,6	20
1,35	1,71	100	2,85	15	36

Spill 6

Mattebingo 2.

Som spill 5, men her med divisjon.

8	25
0,05	1
0,2	0,5

4	0,25	2,5	5	125
0,4	0,1	10	20	500
0,2	0,05	0,5	2	50
160	16	8	0,32	25
0,008	0,002	0,02	0,04	3,125
0,025	0,00625	0,0625	0,125	40

Marianne Klev

Presentasjon av to idéhefter til lommeregnerne

Som lærer i grunnskolen uten tilleggsutdanning i matematikk, ble jeg ganske overrasket over forespørselen om å evaluere lommeregnerne for Tangenten. Det viste seg imidlertid at det ikke var mine matematikkunnskaper som var avgjørende, men at jeg hadde erfaring med å undervise. Jeg har undervist i matematikk i 20 år og vært innom alle trinn i barne- og ungdomsskolen.

De to idéheftene som skal under lupen er:

Texas Instruments: «Min første lommeregner»
og

Casio: «Et idéhefte for den lille lommeregneren».

Begge heftene er beregnet på grunnskolen.

Jeg vil ikke stille dem opp mot hverandre, men si litt om hver av lommeregnerne og vurdere de respektive idéheftene.

TEXAS INSTRUMENTS

LOMMEREGNEREN

Modellen som idéheftet er knyttet til heter TI-106.

Den er enkel, har plass til åtte siffer, men har de tastene som trengs i grunnskolen (+, -, ×, /, =, %, √, M+, M-, MRC og tast for å bytte for-tegn). Taster, solcellepanel og størrelse er OK.

IDÉHEFTET

Innledning: God argumentasjon for hvorfor vi bruker lommeregner, samtidig som forfatteren understreker viktigheten av å regne med konkrete.

Mål: 1. Lære å forholde seg til tastaturer og maskiner styrt av taster.

2. Bruke lommeregneren som hjelpemiddel ved utforskning av matematikkens verden og skape bedre forståelse.

Innhold: Arbeidsark for elevene
Lommeregnersertifikat
Arbeidsark for gruppearbeid

Tilgjengelighet for elever: Aldersadekvate, selvinstruerende oppgaver, fin progresjon, en del spennende/morsomme oppgaver, enkelt/forståelig språk.

Tilgjengelighet for lærere: Konkrete, gode tips om hvordan man praktisk kan gjennomføre/varierte/videreføre arbeidet.

Opgavearkene trenger ingen nærmere forklaringer.

Lay-out: Variert og barnevennlig utforming av sidene med bilder og store nok bokstavtyper.

Knyttet opp mot L-97: Ja, både i innhold og metodikk.

I hvilken grad er målet/-ene nådd?: Elevene vil ha store muligheter for å både beherske lommeregneren og utvikle matematikkforståelsen ved å gjennomføre dette opplegget. Kan dette heftet brukes?: Ja, absolutt!

CASIO

LOMMEREGNEREN

Modellen som idéheftet er knyttet til heter Casio SL-450 L Den har de samme funksjonene som TI-106. Taster, solcellepanel og størrelse er OK.

IDÉHEFTET

Innledning: Greit nok forord, men lite vekt på didaktikken i forbindelse med bruk av lommeregner.

Mål: «Gi eksempler på hvordan en fornuftig bruk av en enkel kalkulator kan styrke tall- og regneforståelse og på en aktiv måte også bidra til en bedre forståelse i matematikken.»

Innhold: Oppgavesider med bestemte tema og med henvisning til læremål, nivå og metode – en elevside og en lærerside til hvert tema.

Tilgjengelighet for elever: Veldig abstrakte oppgaver, vanskelig språk, for mange begreper og operasjoner innføres på en gang (f.eks. «Bruk sifrene 1, 3, 5, 7 og 9 til å danne to tosifrede tall og ett ensifret tall slik at det endelige produktet blir et størst mulig partall når du ganger det ensifrede tallet med forskjellen på de tosifrede tallene.» – beregnet på 4.–5. klasse???)

Tilgjengelighet for lærere: Oversiktlig og grei lærerveiledning. God idé med en lærerside til hver elevside!

Lay-out: Elevsidene er kjedelige med lite bilder og mye skrift.

Knyttet opp mot L-97: Temaene stemmer

bra, men ikke pedagogikken.

I hvilken grad er målet nådd?: Ved ukritisk bruk av dette heftet, kan en del elever bli mer forvirret enn styrket i sin matematikkforståelse.

Kan dette heftet brukes?: Bare hvis læreren klarer å velge ut, konkretisere og «oversette» oppgavene. – og evt. som ekstraoppgaver for flinke elever.

Et lite tips til slutt:

– til skoler som ikke har råd til å utstyre hver elev med en lommeregner:

Kjøp inn et par klassesett, sy 30 lommer på et tøy-stykke til hvert av settene og monter disse på f.eks. finerplater. Nummerer lommene og lommeregnerne 1–30 og sett «tavlene» på lett tilgjengelige steder. Når klassene skal bruke lommeregner er det bare å hente en slik «tavle». Elevene har et fast nummer, henter «sin» lommeregner og setter den tilbake i riktig lomme etter bruk. Hvis en lomme er tom, vet læreren hvem som ikke har levert ennå. Det blir lite svinn og mindre slitasje på lommeregnerne enn når de fraktes rundt i elevenes skolesekker.

(Etter idé fra Vardåsen skole, Kristiansand).

Frode Olav Haara

Fri bruk av kalkulator

Fri bruk av kalkulator i undervisning – hva gjør det med elevens valg av arbeidsmetode ved utregninger?

I L-97 presiseres det at kalkulatorbruk skal være en viktig del av det elevene lærer (KUF, 1996). En bevisst tilrettelegging for bruk av kalkulator i konstruktivistisk inspirert undervisning vil på bakgrunn av mulighetene som kalkulatoren gir eleven, kreve at vi som lærere legger enda mer spesifikk vekt på utregning ved hjelp av hoderegning spesielt og valg av arbeidsmetode generelt.

Hva skjer når kalkulatoren kan brukes fritt?

Mye forsknings- og utviklingsarbeid er utført med blant annet ønske om økt anvendelse av kalkulator i skolen (Se for eksempel Shuard, 1991; Welsh, 1992), og i skolen er kalkulator blitt en selvfølgelig del av undervisningen. Shuards omfattende prosjekt (CAN-prosjektet) fra England og Wales i perioden 1986-89 skiller seg ut i denne sammenheng, på grunn av sitt store omfang (Shuard, 1991). Gjennom prosjektet ønsket man å studere hvordan fri bruk av kalkulator ville påvirke barnetrinnets matematikkpensum, og på bakgrunn av dette utvikle et pensum som tok aktivt hensyn til kalkulatoren som virkemiddel. Ut i fra prosjektets resultater så Shuard få eller ingen negative sider ved uhemmet bruk av kalkulator i

skolen, en oppfatning som senere er blitt støttet av for eksempel Welsh (1992), i hans noe mindre omfattende prosjekt knyttet til 3.- og 4.-klassingers valg av arbeidsmetode i et kalkulatorrikt miljø.

Konstruktivismen som retning anerkjenner og ivrer for elevenes mangfoldige metodebruk og selvstendige valg i læringsfasen. Gjennom forskning er det vist at i denne sammenheng har kalkulatoren sterkt påvirket og endret elevenes valg av arbeidsmetoder ved utregninger innenfor de fire regneartene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, og da særlig i forhold til bruk av hoderegning og standardalgoritmer (Haara, 2000). Kalkulatoren reduserer nemlig sterkt kravene til minne hos brukeren, og som en direkte konsekvens av dette er standardalgoritmene langt på vei utradert som hjelpemiddel ved utregninger (Welsh, 1992). Ingen fornuftig grunn tilsier at den samme utvikling skal finne sted også i forholdet mellom kalkulator og hoderegning. Men det skjer likevel (Haara, 2000). Allerede i 1983 påpekte Usiskin (1983) i en form for betenkning knyttet til skolens ubeslutsomhet i forhold til kalkulatoren, at når kalkulatoren ble tatt i bruk på ett område, var det ingen grunn til at den ikke skulle tas i bruk også på beslektede områder. Han eksemplifiserte dette ved at bruk av kalkulator på 3-sifrede utregninger naturligvis også ville føre til at den snart ville bli brukt på 2-

sifrede utregninger. Senere undersøkelser bekrefter Usiskins tankerekke (se for eksempel Lindblom, 1998), og det er heller ingen grunn til å tro at bruken stanser der. Et komplekst nettverk av menneskelige egenskaper og faktorer bidrar til at kalkulator mer og mer blir brukt i utførelsen av utregninger som er vel så rasjonelle å foreta i hodet. Eksempler på slike faktorer og egenskaper er vanen vi knytter til å bruke kalkulator, makeligheten som ligger i at kalkulatoren gjør regnearbeidet for oss, og den etter hvert følte nødvendigheten av å sjekke at svar vi har regnet i hodet stemmer med kalkulatorens forslag¹.

Forskning viser altså at en negativ konsekvens av selvstendig og upåvirket kalkulatorbruk er mindre bruk av hoderegning. Elevene velger bort bruken av hoderegning til fordel for kalkulator. Økt bruk av kalkulator fører til at elevene bruker mindre hoderegning, og at de blir svakere i hoderegning (Lindblom, 1998; Haara, 2000).

Hva kan vi gjøre?

Dersom vi legger til rette for bruk av kalkulator i undervisningen, konstruktivistisk preget eller ei, er det nødvendig å gi elevene mulighet til å vurdere sine valg av arbeidsmetoder ved utregninger. Derfor er det også viktig å arbeide for å opprettholde og styrke andre utregningsmetoder. Elevene må kunne regne i hodet, og i alle fall til en viss grad kunne regne med papir og blyant, for ikke å bli avhengige av kalkulatoren som hjelpemiddel. Dette vil nok de fleste være enige om. Hvordan opprettholdelsen og styrkingen av disse andre utregningsmetodene skal finne sted, er det derimot delte meninger om. Det bør i alle fall ikke bli slik at tanker, ideer og arbeid som hittil er gjort i forhold til hoderegning, standardalgoritmer, etc. forsvinner fullstendig fra skolen. Et slikt irrasjonelt sprang fra en tenkemåte til en annen², ser vi allerede konturene av i skolen. Den naturlige og vedvarende trening og øvelse i hoderegning,

blant annet gjennom arbeid med standardalgoritmer og rene drilloppgaver er nesten borte, og er i mindre grad erstattet av annet spesifikt arbeid knyttet til hoderegning.

I en bevisst tilrettelegging for bruk av kalkulator i et læringsmiljø hvor elevens valg av arbeidsmetode er suverent (konstruktivistisk læringsmiljø), må vi derfor være spesielt oppmerksomme på, å forsøke å motvirke, en del mekanismer knyttet til valget av metode (Haara, 2000)³. Alternativet er at elevens hoderegningsferdigheter forvitrer og hoderegningens bruken synker.

Innenfor forskning pekes det i dag særlig på tre ulike innfallsvinkler til økt bevisstgjøring og mangfold i forhold til elevens bruk av hoderegning og valg av arbeidsmetode ved utregninger:

1. Fokus på tallfølelse.

Mer elevsentrert arbeid knyttet til styrking av tallfølelse (se for eksempel Sowder, 1992; Hedrén, 2000). På grunn av tallfølelsens sentrale rolle i arbeid med tall og utregninger, og den nære sammenhengen mellom tallfølelse og hoderegning, vil manglende tallfølelse gjøre det vanskelig å se betydningen av tallsammenhenger, overslagsregning, utregnede svar, og egentlig verdien av hoderegning i seg selv.

2. Instruksjon i hoderegning.

Mer spesifikk instruksjon i hoderegning (se for eksempel Ashcraft, 1995; McIntosh, 1995). Dette gjelder både tabellbruk, automatisering og undervisning av hoderegningstrategier.

3. Bruk av kalkulator.

Riktig bruk av kalkulator vil gi bedre tallfølelse (Shuard, 1991; French, 1997), og dermed vil bruk av kalkulator heller stimulere til mer bruk av hoderegning, enn til mindre bruk av hoderegning (Shuard, 1991), når vi ser Punkt 3 i sammenheng med Punkt 1.

Sett fra en læringsteoretisk synsvinkel, virker forslaget om mer spesifikk instruksjon i hode-regning som et forslag med fotfeste i en læringstradisjon som lenge har vært på vei ut av skolen. Drill og undervisning av enda flere algoritmer for utregning gir assosiasjoner til normer og konformitet, og det er tilknytninger matematikken lenge har forsøkt å arbeide seg bort fra. Drill har lenge vært omdiskutert som arbeidsmåte i forhold til den forståelsen elevene søker, og hver underviste algoritme, skriftlig eller mental, skaper en ny mal å arbeide etter og holde styr på for eleven (Carpenter, 1998). Hvorvidt økt bevissthet i forhold til hode-regning og valg av arbeidsmetode bør komme gjennom mer spesifikk instruksjon, må derfor diskuteres og dokumenteres.

På den annen side framstår til dels Punkt 3 som et spesifikt eksempel på hvordan et irrasjonelt sprang (Kuhn, 1970) kanskje kan fungere i praksis. Alt som har vært knyttet til bevisst læring av hode-regning etter tradisjonelle læringsformer ignoreres, til fordel for annen læringsteori. I dette tilfellet gjennom at valgfri bruk av kalkulator alene skal gi elevene bedre tallfølelse og stimulere til økt bruk av hode-regning. En slik utvikling kan fort ekskludere de gevinster tradisjonell undervisning tross alt har gitt i forhold til hode-regning og valg av arbeidsmetode, og gir også uttrykk for en oppfatning av mennesket som utelukkende styrt av fornuft. Mennesket opptrer ikke alltid som et rasjonelt og fornuftig vesen, et vesen som alltid gjør fornuftige og praktiske valg. Vi lar oss, som nevnt tidligere, påvirke av en rekke komplekse faktorer i forbindelse med vårt valg av arbeidsmetode knyttet til en utregning. Darken (1991) konfronterer, i sin artikkel knyttet til balansen mellom kalkulatorbruk og hode-regningsbruk, blant annet tanken om at økt tilgang og bruk av kalkulator skal føre til mer reflekterte og bevisste valg av arbeidsmetoder. I stedet hevder hun at tilgangen til kalkulator betyr at det heller må utvikles et bredt og tolerant syn på alternative

utregningsmåter (Punkt 1 og Punkt 2), dersom man skal kunne vurdere å bruke også andre utregningsmetoder enn kalkulator.

Konklusjon

Kalkulatoren er kommet for å bli, og den bør derfor tas i bruk i alle sammenhenger der den kan være oss til hjelp. Men det må ikke bli slik at kalkulatoren, og de mekanismer som påvirker bruken av den, medfører at vi ikke lenger klarer å foreta elementære utregninger på andre måter. Forskning viser at når kalkulatoren kan brukes fritt og ukritisk, blir den brukt mer og mer, og på stadig mer elementære utregninger. Ved aktiv bruk av kalkulator i konstruktivistisk preget undervisning blir det derfor nødvendig også å fokusere spesifikt på hode-regning og bevisstgjøre elevene i deres valg av arbeidsmetode (Haara, 2000). Kalkulatoren er et fremragende hjelpemiddel, men ikke alltid det beste, og jeg tror ikke at ukritisk kalkulatorbruk hjelper eleven til å innse dette. Andre arbeidsmetoder ved utregning må også brukes og få vise sine fordeler og begrensinger.

Referanser

- Ashcraft, M.H. (1995). Cognitive Psychology and Simple Arithmetic: A Review and Summary of New Directions. *Mathematical Cognition*, 1, 3-34.
- Carpenter, T.P., et al. (1998). A Longitudinal Study of Invention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1, 3-20.
- Darken, B. (1991). Arithmetic + Calculators + College Students = ? *Journal of Developmental Education*, 15, 2, 6-12.
- French, D. (1997). *Mental Methods in Mathematics: A First Resort*. Leicester: The Mathematical Association.
- Haara, F.O. (2000). Hode-regning og valg av arbeidsmetode ved elementære utregninger i addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. *NOMAD*, 2, 33-51.

(fortsettes side 41, høyre spalte)

Anne Berit Fuglestad

Simulering på regneark

Trille terninger eller kaste mynter er eksempler som går igjen i sannsynlighetsregningen. Ofte kunne vi trenge flere forsøk for å se en klar sammenheng og få fram gode illustrasjoner på resultatene som vi kan forvente ut fra teorien. Regneark er et godt hjelpemiddel i denne sammenheng. Ved hjelp av tilfeldige tall, en «funksjon» som fins i regnearket, kan vi legge opp mange forskjellige simuleringer, lage tabeller og tegne grafer for å få oversikt over resultatene. I denne artikkelen vil jeg vise noen eksempler på hvordan regnearket Excel kan brukes til enkle simuleringer. Jeg tar også med noen tips om hvordan formler og redigeringsmuligheter i Excel kan være til hjelp i arbeidet.

Eksempelene er ikke ment som erstatning for å trille terninger, kaste med mynt eller andre forsøk i praksis. Men når elevene har gjort dette 40, 60 eller 100 ganger, kan det være fint å se hvordan forsøkene kan videreføres. Det er lurt å lage ryddige tabeller på papir først, slik at vi kan kjenne igjen de samme oppstillingene på regnearket, og se hvordan vi kan utnytte regnearket til å gjøre mange flere forsøk.

Tilfeldige tall

Funksjonen =TILFELDIG() gir et tilfeldig tall mellom 0 og 1, og den er plassert under valget *Sett inn, Funksjon* i Excel. Legg merke til at denne ikke trenger noe argument, derfor en

tom parentes! For å få andre tallområder kan vi multiplisere med en passende faktor, og runde av slik at vi får bare hele tall om det er ønskelig. Dersom utfall i forsøket skal være hele tall, er det ikke nok å bare skjule desimalene med innstilling av format, tallene må rundes av ved å kutte ut desimalene. HELTALL() runder av nedover og passer godt å bruke i denne sammenheng. Prøv å skrive inn på regnearket =TILFELDIG()*10 og =HELTALL(TILFELDIG()*10) og trykk gjentatte ganger på funksjonstasten F9.

TILFELDIG() er ikke en funksjon i matematisk betydning, men en generator for tilfeldige tall. Det betyr at vi ikke vet hvilket tall som kommer ut, men det skal være omtrent samme sannsynlighet for alle tall mellom 0 og 1 og det skal ikke være noe mønster i måten tallene velges ut på. Det siste er egentlig ikke mulig å oppfylle for når tallene beregnes av en datamaskin må det ligge en algoritme bak. Noen velger derfor å snakke om pseudo-tilfeldige tall. For vårt formål kan de likevel brukes uten problemer. Det fins også en annen «funksjon» som kan brukes, =TILFELDIGMELLOM(1;10) trekker hele tall fra 1 til og med 10, men denne krever at tillegget *Analyseverktøy* er installert. Se hjelp-menyen i Excel for mer informasjon om dette og om funksjonene som brukes i eksemplene.

Terningkast kan da simuleres ved å bruke =1+HELTALL(TILFELDIG()*6) eller =TILFELDIGMELLOM(1;6).

To terninger

For å kaste flere terninger og skrive opp resultatene skriver vi formelen inn i ei rute og kopierer nedover så mange vi ønsker. Kast med to terninger kan vi utføre ved å lage to kolonner med tilfeldige tall. Vi ser at så snart en ny formel legges inn eller kopieres, vil alle ruter med tilfeldige tall forandre verdi. Dette skjer på grunn av at regnearket normalt er satt opp til å regne gjennom alle rutene på nytt når nye verdier legges inn. Denne automatiske beregningen kan vi slå av om det er ønskelig. Et trykk på F9-tasten vil uansett regne gjennom regnearket på nytt, og dermed har vi en ny simulering.

Hvor mange kast ønsker vi med to terninger? Det kan være aktuelt å lage oppstillingen med et begrenset antall først slik at vi ser at det fungerer. I eksemplet nedenfor er det gjort 100 kast, her plassert fra linje 4 til og med 103. Videre har vi beregnet summen av de to utfallene i rute C4 med $=A4+B4$, og kopiert nedover så langt vi ønsker.

Så trenger vi en bedre oversikt, i form av en frekvenstabell. De aktuelle utfallene 2, 3, ... 12 er plassert i kolonne E og i F ønsker vi frekvensene. Her passer funksjonen $=\text{ANTALL.HVIS}()$ godt å bruke. $\text{ANTALL.HVIS}(C4:C103;2)$ vil telle hvor mange av tallene i området C4 til C103

som er lik 2. Vi kan også bruke rutereferanse som krav i formelen, og med valg av faste referanser for området kan vi skrive $=\text{ANTALL.HVIS}(\$C\$4:\$C\$103;E5)$ i rute F5 og så kan kopieres nedover. Som en kontroll er det greit å summere frekvensene for å se at antallet stemmer.

Til slutt tegner vi et stolpediagram for å få et inntrykk av hvordan resultatene fordeler seg. Diagramveiviseren, som startes med menyvalget *Sett inn, Diagram* eller diagramikonet på verktøylinja, gir god hjelp til å få fram diagrammet. I dette tilfellet er det viktig å få med Etiketter for kategoriakse(X) $=\text{Ark1!}\$E\$5:\$E\15 , under kildedata. Etter valget av diagramtype, kommer vi til kildedata for diagrammet. Klikk da på arkfane *Serier* og sett inn området, for eksempel ved å markere det med musa.

Trykk så på F9 for å få en ny simulering av 100 kast med to terninger. Både tabellen og diagrammet blir automatisk oppdatert, og gir en god illustrasjon på hvordan fordelingen kan variere i forskjellige forsøk. Senere kan vi utvide til flere kast ved å kopiere flere linjer nedover i tabellen. Da er det også aktuelt å justere noe på formlene som teller opp for å få med alle linjer i opptellingen.

Mynt og krone

Hvordan går det med frekvensen av krone når vi teller opp gjentatte kast med en mynt?

Her vil en grafisk framstilling være nyttig for å se hvordan den kumulerte relative frekvensen for krone etter hvert blir mer stabil og i nærheten av 0,5.

Vi lager igjen en tabell på regneark. Formelen =HELTALL(TILFELDIG()*2) vil gi 0 eller 1, som kan tolkes mynt eller krone. Opptellingen kan da gjøres enkelt ved å summere resultatet så langt, for hver gang utfallet er krone får vi 1 i kolonne B, og det telles i summen i kolonne C. I rute C4 er resultatet lik første kast, i rute C5 er det lik foregående pluss siste kast, dvs. =C4 + B5 og slik fortsetter det nedover. Siden nummer på kast er lik antall kast kan vi så bruke =C5/A5 i rute D5 for å regne relativ frekvens.

Et alternativ her kan også være å telle antall kast så langt med formelen =ANTALL(B\$4:B5). Denne kan kopieres og området vil bli riktig siden linje 4 er låst fast mens linje 5 i formelen er relativ og justeres ved kopiering.

Så tegner vi linjediagram med utgangspunkt i kumulative relative frekvenser i kolonne D. På illustrasjonen er det tatt med to

eksempler, det ene er med 20 kast og det andre med 80 kast.

På grafen er automatisk skalering av den vertikale aksene (y -aksen) slått av, slik at vi unngår at den stadig forandres. Slike justeringer går greit å ordne etter at diagrammet er tegnet. Klikk på y -aksen i diagrammet for å aktivisere den, og dobbeltklikk for å få fram dialogboksen for å redigere aksene. På samme måten kan andre deler av diagrammet justeres slik vi vil ha det med valg av skala, skrifttyper, farger og lignende. I første eksemplet kan det være aktuelt å justere avstanden mellom stolpene. Dobbeltklikk på stolpene og velg alternativer i dialogboksen så kan mellomromsbredde settes slik vi ønsker.

Den andre utgaven av diagrammet er laget ved å kopiere det første og redigere litt. Et klikk på høyre museknapp innenfor diagram-området gir mulighet til å velge *kildedata*. Det kan vi forandre litt på området for å få tegnet diagrammet for 80 myntkast i stedet for 20, som i første diagram. I tillegg er linja i diagrammet redigert for å fjerne markeringen på hver enkelt observasjon.

Kø på postkontoret

Vi kan også simulere helt andre situasjoner. Hva med biler i kø foran vaskehallen på bensinstasjonen eller køen på postkontoret? Vi må da tenke oss en modell av situasjonen. La oss anta at det kommer 10 personer til postkontoret i løpet av en time, på «tilfeldige» tider, og at hver kunde trenger 4 minutter for å bli ekspedert. Ekspedisjonstid er satt inn i rute C2, dermed er det lett å forandre denne senere, uten å forandre formlene. Vi kan trekke tider fra 0 - 59 tilfeldig, og la de representere ankomsttider i minutter i løpet av den timen vi simulerer. Dermed kan vi lage en tabell og sette opp starttid og sluttid. Første kunde starter straks hun er kommet. Neste kunde kan ikke starte før den foran er ferdig, og heller ikke før han er ankommet, så der må vi ha en formel som velger det største av disse tallene =STØRST(A6;C5). Alternativt kan også en HVIS-setning brukes her, =HVIS(A6>C5;A6;C5). Videre regner vi sluttid som starttid + ekspedisjonstid, =B5+\$C\$2. Legg merke til at det er fast henvisning til C2 her, med dollartegn foran referansene \$C\$2.

Problemet i denne oppstillingen er at vi trenger å ha ankomsttidene i sortert orden for å kunne gjøre beregninger. Men sorterer vi formler som inneholder TILFELDIG() så blir resultater nye tilfeldige tall. Og slår vi av automatisk

beregning, vil vi ikke få de andre formlene oppdatert slik vi ønsker. Det fins likevel en grei løsning på dette. Vi trekker tilfeldige tall ved å bruke formelen =HELTALL(TILFELDIG()*60) og kopierer nedover så langt vi trenger. Så merkes området med tallene, vi tar kopi og limer inn utvalg. Vi velger *Rediger*, *Lim inn utvalg*, og krysser av for *verdier*. Da får vi limt inn verdier, ikke formler, og da blir disse ikke forandret mer. Dermed kan vi sortere tallene for ankomsttider og beregningene videre går som normalt.

Problemet nå er bare at det blir ganske mange tastetrykk og valg som må gjøres for hver ny simulering. Vi må på nytt skrive inn formelen for tilfeldige tall, kopiere, lime inn verdier og sortere. Men dette er jo nettopp en situasjon der vi kan lage en *makro* for å ta seg av alle disse tastetrykkene. En makro er et lite program som brukes for å automatisere en slik sammensatt operasjon. Vi kan registrere alle tastetrykk, eller «spille inn» slik vi gjør med lydbånd, og så kan vi senere kjøre makroen når det passer. Menyvalget *Verktøy*, *Makro*, *Registrer ny makro* setter i gang «opptak» av makroen. Alt vi gjør etter dette blir registrert. En liten stoppknapp kommer opp, og viser at vi er i gang med registrering. Når alt er gjort som det skal, brukes stoppknappen til å avslutte registrering. I dette tilfellet passer det godt å knytte makroen til en knapp på regnearket. Det gjøres ved å

velge knapp i Skjema-menyen, tegne ut knappen der den skal stå og tilordne den til makroen vi registrerte. Da vil vi kunne aktivisere makroen med et klikk og nye ankomsttider i sortert rekkefølge er straks på plass.

Nå kan vi vurdere modellen og gjøre eventuelle forandringer. Kanskje det kommer flere kunder? Er det rimelig å anta at alle trenger like lang ekspedisjonstid? Det er kanskje bedre å trekke også ekspedisjonstider som tilfeldige tall innenfor et rimelig område, for eksempel fra 1 til 10 minutter og sette opp en egen kolonne for dette. Men ekspedisjonstider er vel ikke jevnt fordelt i dette området, kan vi ta hensyn til det? Kanskje det er mulig å tenke seg at det er to som ekspederer? Vi ser at det er muligheter for å bygge ut eksemplet videre.

Monte Carlo-metoden på areal

Vi trekker tilfeldige koordinater innenfor et kvadrat med side en, plassert med diagonalt motstående hjørner i $(0, 0)$ og $(1, 1)$. Hvor mange av disse havner innenfor sirkelen med radius lik en? Dette kan vi også simulere på regneark. Koordinatene x og y trekkes med `=TILFELDIG()`, og vi kan undersøke om de er innenfor sirkelen ved å se om $x^2 + y^2$ er mindre enn en. Vi kan også tegne et prikkdiagram for å få inntrykk av hvordan punktene fordeler seg innenfor kvadratet. Det er bare en kvart av sirkelen med radius en som

er dekket av dette kvadratet. For å finne sirkelens areal må vi multiplisere med 4. Det skulle tilsvare et areal på 4 for hele kvadratet og π for sirkelen. Her har vi med andre ord funnet en metode til å bestemme arealet av sirkelen, og dermed indirekte π ved å trekke tilfeldige tall.

Dette resonnementet bygger på at de tilfeldige tallene er jevnt fordelt og gir koordinater jevnt fordelt over kvadratet. Her har vi bare benyttet simulering i stedet for andre matematiske metoder. Denne metoden kan også brukes på andre områder, for eksempel finne areal under kurver til funksjoner som er vanskelige å integrere symbolsk. Også i mange andre sammenhenger er simuleringer aktuelle for å teste ut kompliserte modeller.

Flere eksempler

Spille på lykkehjul er et vanlig eksempel å bruke i undervisning i sannsynlighetsregning. Dersom et lykkehjul har 10 felter passer det med $1 + \text{HELTALL}(\text{TILFELDIG}() * 10)$. Skal vi snurre flere hjul får vi flere kolonner på samme måte som i eksemplet med terningkast eller kast med mynter. Et annet eksempel er å se på frø som spirer. Hvis spireevnen er 80 % vil det passe med $=\text{HVIS}(\text{TILFELDIG}() * 100 < 80; \text{«Spirer»}; \text{«Ikke»})$ for å gi resultatet av ett frø.

Hver gang vi bruker $\text{TILFELDIG}()$ får vi et nytt svar, derfor vil $=\text{TILFELDIG}() + \text{TILFELDIG}()$ gir et annet svar enn $=\text{TILFELDIG}() * 2$. Dersom vi har behov for å teste på eller bruke resultatet av et trekk med tilfeldig-funksjonen flere ganger i formler videre, må vi bruke ei rute for verdien og så teste på denne rutereferansen. Det gir kanskje også den mest oversiktlige måten å ordne oppstillingen på.

Mer om myntkast

I eksemplet foran studerte vi kast med en mynt. Hva om vi kaster flere mynter samtidig og teller opp antall krone. Hvordan blir da fordelingen? To eller tre mynter går fort å telle opp manuelt, men med flere passer det godt på regneark. Dersom vi bruker 10 mynter samtidig vil vi ha aktuelle utfall fra 0 til 10.

Her er det satt opp en tabell med 10 myntkast i hver linje. Tabellen inneholder 500 linjer og det er beregnet sum av antall krone for hver linje. Dette går greit med $=\text{SUMMER}(A4:J4)$ siden krone er representert med tallet 1, og mynt med 0. Frekvenstabellen er laget på samme måte som i tidligere eksempler. Videre er det beregnet antall kast (antall linjer) ved å summere frekvensene, gjennomsnitt med formelen $=\text{GJENNOMSNIITT}(K4:K503)$ og varians med formelen $=\text{VARIANS}(K4:K503)$.

Dersom vi ønsker å se på kast med flere mynter, kan dette ordnes ved å sette inn ekstra kolonner i tabellen, før summeringen i ko-

lonne K, og kopiere formler for myntkast til de nye områdene. De øvrige formlene er uforandret, bortsett fra at vi trenger flere linjer i frekvenstabellen og området for kildedata i diagrammet må forandres tilsvarende. Slik kan vi gjennomføre større simuleringer, flere kast i hver linje, og flere linjer nedover for å få større tallmateriale for frekvenstabellen. Vi kan ikke unngå å legge merke til at diagrammene viser en typisk form som gir grunn for videre sammenlikninger.

Kast med mynt har to utfall. Dette gjentas flere ganger i hver linje, eller vi trekker samtidig et passende antall, n . Denne situasjonen er typisk for det vi kaller en binomisk fordeling. Hva er sannsynligheten for å få x treff av n mulige? Teoretisk er sannsynligheten for å få x treff gitt ved formelen $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$, der p er sannsynlighet for treff. I vårt tilfelle gir det $\binom{10}{x} 0,5^x \cdot 0,5^{(10-x)}$. Den binomiske fordelingen er også tilgjengelig i Excel, og dermed kan vi sammenligne resultatet av forsøket vårt med den teoretiske fordelingen, gitt ved formelen

=BINOM.FORDELING($x;n;p$;USANN) der x , n og p er som gitt i formelen foran. Den siste parameteren, USANN, bestemmer at vi skal ha en vanlig fordeling som viser sannsynlighet for enkeltutfallene. Dersom vi setter SANN på denne plassen, får vi kumulative sannsynligheter. I det aktuelle tilfellet får vi da =BINOM.FORDELING(M5;10;0,5;USANN)*\$N\$17 der faktoren N17, som er antall forsøk, er med for å kunne sammenligne med frekvensene i det aktuelle forsøket.

Det kunne også være aktuelt å sammenligne med normalfordelingen. Den er gitt ved

formelen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Dersom vi

braker gjennomsnitt og varians for μ og σ^2 vil vi kunne uttrykke dette med følgende formel i regnearket:

=(1/EKSP((M5-\$N\$18)^2/(\$N\$19*2)))/(ROT(2*PI)*\$N\$19))*\$N\$17

M5 tilsvarer x , N18 er gjennomsnitt, N19 er varians, og N17 antall forsøk, som er tatt med for å kunne sammenligne med frekvensene i forsøket. Diagrammet nedenfor viser hvordan denne sammenlikningen kommer ut.

Eksempelene her viser at med enkle midler kan vi simulere forskjellige typer forsøk basert på tilfeldige tall. Det er viktig at elevene vet hva som foregår i forsøkene. Derfor er et forarbeid som kast med terninger, kast med mynter, bruk av lykkehjul og andre konkrete hjelpemidler viktige i innføringen. Simuleringer på regnearket kan komme som en videreføring og støtte for å se at det vi senere forklarer teoretisk har god sammenheng med de forsøkene vi har gjort.

Anne Birgitte Fyhn

Matematikk innbakt i kunst & håndverk

Som matematikklærer er det alltid lærerikt å besøke studenter og elever når de har undervisning i andre fag. I den følgende teksten beskriver jeg arbeidene til studentene Thomas og Siri i første klasse på allmennlærerutdanninga, en dag i mars 2001. Studentene hadde fått følgende oppgave: «Lag ei pute eller en veggtekstil som skal inneholde et flatemønster og en bord.» Både Thomas og Siri lagde veggtekstiler og skulle i gang med å montere bildene sine.

Thomas sitt bilde var opprinnelig i A2-format, inklusive borden rundt. Rundt bildet valgte han en enkel bord som besto av røde sirkelflater. Thomas lagde borden først – bildet inni kunne han justere slik at det passet innenfor bordens begrensinger.

Thomas tok utgangspunkt i ei arbeidstegning i full størrelse. Ved hjelp av passeren målte han seg fram til hvor mange sirkler det gikk på høykant av bildet. Han endte med at bildet ble noen cm lenger enn A2 for at han skulle få plass til 12 hele sirkler. Deretter målte han hvor mange cm det var mellom de to kolonnene med sirkler. Thomas dividerte dette på sirkeldiameteren. Han fikk plass til 6 sirkler horisontalt og i tillegg ble det noen cm til overs. Deretter halverte han det «som ble til overs» og fant hvor mange cm det ble til «luft» på hver side av de seks sirklene. For sikkerhets skyld prøvde han seg litt fram med passeren også, for å sjekke at han hadde regnet riktig.



Thomas sine divisjonsproblem:

Thomas har utført flere divisjoner i forbindelse med plasseringen av borden rundt bildet. Målsettingen hans med disse divisjonene har vært å få borden til å gå opp, slik at mønsteret skulle stemme. For å få plassert de tolv sirklene på høykant, valgte han å bruke en stoffbit som var litt lengre enn opprinnelig planlagt. For å få plassert de seks sirklene horisontalt, gjorde han

bruk av symmetri, borden var aksesymmetrisk om ei loddlinje på midten av bildet. På hver side av midtlinja var det tre sirkler, utenfor dem fulgte like mye «luft» på hver side.



Siri sitt bilde består av tre tapebiter som er kombinert på ulike måter. Hun startet med å dele bildet sitt i 16 rektangulære ruter. Hver rute var om lag dobbelt så høy som bred. I tillegg besto hver rute av 8 kvadrater. Kvadratene trykket hun ved hjelp av en trebit med kvadratisk side. Hun oppdaget at lengden av fire trebiter ble en tanke lengre enn høyda i rektangelet. Dette løste hun ved at hun fikk en overlappning som viser seg som et horisontalt stripemønster på bildet. Siri kan også fortelle at forarbeidet med utregningene og målingene av stoffet tok lang tid uten at hun da tenkte: «Dette er matematikk».

Tre tapebiter kan organiseres innbyrdes på mange ulike måter. Først tenkte Siri å plassere alle tapebitene, $16 + 16 + 16 = 48$, i ulike mønster. Av tidsmessige hensyn valgte hun å begrense antall kombinasjoner av de tre bitene. Siri fulgte et visst system i plasseringen av tapebitene. Tre vertikale biter finner vi følgende steder: Rad 1: nr 1 og 3, rad 2: nr 2 og 4. Rad 3 og 4

blir henholdsvis lik rad 1 og 2. Eller vi kan se det på en annen måte: Tre vertikale biter langs diagonalen fra venstre og nedover mot høyre og på annen hver av de parallelle diagonalene. Det er aldri to like utgaver av tre vertikale biter på samme rad.

To horisontale og en vertikal bit finner vi langs den andre diagonalen. En horisontal og to vertikale biter finner vi både ved øverste venstre hjørne og ved nederste høyre hjørne.

Borden langs sidekanten er trykket ved hjelp av et viskelær og borden er i bildets bunnfarge. Siri valgte å bryte borden ved å legge inn to gule ruter litt ovenfor midten fordi hun ønsket at den som ser på bildet løfter blikket og ser hele bildet.

Plasseringen av tapebitene er utført etter et mønster som Siri selv har funnet fram til. Matematikktenkingen hennes her lå i å pønske ut mønsteret. Mønsteret er ikke formalisert ved hjelp av tall og bokstaver slik vi vanligvis gjør i matematikken. Siri sitt mønster ligger til grunn for plasseringen av tapebitene i de 16 rutene på bildet.

Siris divisjonsproblem:

Siri har utført flere divisjoner for å få kvadratene i bunnmønsteret til å gå opp i de rektangulære rutene. Fordi divisjonen nesten gikk opp, valgte hun å gjøre bruk av overlappning.

Divisjon

Når norske skolebarn lærer om delestykker som ikke går opp, så lærer de at «da avrunder man». Dette gir imidlertid ikke mening innenfor formingskonteksten. Der er målsettingen å få divisjonen til å gå opp. Thomas og Siri har gjort bruk av ulike strategier for å få dette til. Matematikklærere som ikke har kjennskap til formingsfaget, står i fare for å overse at mange elever har kunnskaper om divisjon innenfor formingskonteksten.

Efraim Fishbein (Fishbein, 1994) bruker

begrepene intuitive og formelle begreper. Han hevder at selv etter at elevene kan tenke formelt, vil de intuitive modellene påvirke deres resonneringer. Videre sier han at den intuitive modellen ofte ser ut til å være sterkere enn det formelle begrepet. Eleven glemmer rett og slett de formelle egenskapene og husker på de intuitive. Dette er fordi de formelle egenskapene ser ut for elevene som en tilfeldig samling, mens de intuitive er et sammenhengende hele.

Når elevene lærer om divisjoner som ikke går opp, lærer de vanligvis ikke noe om å koble dette til den kunnskapen de har fra formingsaktivitetene. Jeg vil hevde at elever som driver med formingsaktiviteter, innehar intuitive kunnskaper om divisjon: Målsettinga med divisjonen er å få det hele til å gå opp. I matematikktimene blir elevene presentert for noe så ulogisk som: Når divisjonen ikke går opp, skal de «bare» runde av svaret. Bedret kommunikasjon mellom matematikk- og formingslærere vil trolig bidra til bedring av elevenes kunnskaper i matematikk.

Referanser

- Fishbein, E. (1994) The interaction between the Formal, the Algorithmic and the Intuitive Components in Mathematics Activity. I Biehler, R. m.fl.(red) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (s. 231–245). Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers

(fortsatt fra side 31)

- Hedrén, R. (2000). Alternatives to Standard Algorithms. A Study of Three Pupils during Three and a Half Years. *NOMAD*, 1, 35-64.
- KUF (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. Oslo: Nasjonalt Læremiddelsenter.
- Kuhn, T.S. (1970). *The Structure of Scientific Revolutions, 2.Edition*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lindblom, A. (1998). Gymnasieelevers ferdigheter i huvudräkning och överslagsräkning. *Nämnamnaren*, 4, 30-35.
- McIntosh, A. (1995). Vitalisera huvudräkningen. *Nämnamnaren*, 3, 23-27.
- Shuard, H., et al. (1991). *Primary Initiatives in Mathematics Education. Calculators, Children and Mathematics. The Calculator-Aware Number Curriculum*. London: Simon & Shuster.
- Sowder, J.T. (1992). Estimation and Number Sense. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp.371-389). New York: Macmillan.
- Usiskin, Z. (1983). One point of View: Arithmetic in a Calculator Age. *Arithmetic Teacher*, Mai, 2.
- Welsh, R. (1992). To What Extent Do Grades 3 and 4 Children Make Spontaneous Use of Calculators for Computation? In B. Southwell, B. Perry, & K. Owens (Eds.), *Space - The First and Final Frontier*. (pp. 568-573). Nepean, NSW: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Fotnoter

- 1 Se Haara (2000) for en grundigere gjennomgang av disse og andre faktorer.
- 2 Se Kuhn (1970) for hans anerkjente teori om hvordan forskning og vitenskap drives framover i irrasjonale sprang fra et ståsted til et helt annet ståsted.
- 3 Den utvikling vi ser i skolen i dag viser egentlig at vi lærere bør være oppmerksomme på dette uansett.

Morderisk Matte er skriven av Kjartan Poskitt og vart utgitt i England i 1999. Den norske versjonen, omsett av Hege Hammer, er utgjeven under Damm-serien Fæle Fakta 2000.

Denne boka handlar altså om matte, morderisk matte. Den fortel blant anna korleis du kan redde deg ut frå mange farlege situasjonar ved hjelp av enkel matematikk (f.eks. korleis du unngår å skyte deg sjølv i hovudet med kanon. Nyttig!). Dessutan forklarar ho på ein lett forståeleg måte kva dei ulike teikna tyder, korleis og kvifor vi brukar dei. I første kapittel finn du faktisk forklaring på alt mellom pluss og potens, samt ein tresiders guide til «hvordan skremme en vitenskapsmann» (potensrekning med bakterievekst, naturlegvis). I tillegg til fleire oppgåver, mattehistorie, usannsynleg høge tal (endeleg veit eg kva ein gogoolplex er for noko, nemlig eit eitt-tal med ein gogool nullar bak) og andre morderiske situasjonar, er det også ein følgjetong med magikaren Magg og dei modige megamusketerane som skal redde ei prinsesse. Til liks med den skremte vitskapsmannen, handlar også denne om potensrekning, men her snik det seg og inn litt annan matte som til dømes å finne høgde av tårn ved hjelp av skugge. Denne historia fortel altså om kor smart det kan vere å kunne matte. Magikaren Magg bruker matte til å hjelpe megamusketerane å redde prinsessa, samtidig som han

forlanger ei betaling for kvar teneste han gjer. Elles har boka ein overflod med gamle vitsar og nedverdige kommentarar om folk med kalkulator.

Boka passar nok best for dei på mellomsteget i grunnskulen og tidleg i ungdomsskulen, men kan gjerne lesast av alle som ikkje likar matte. Dette er nemlig ei bok som blandar interessante fakta med fri fantasi. Boka har og eit register som gjer at ein kan slå opp matematikkord ein vil lese om.

PS. Det er gjeven ut ei bok til i same serien som heiter *Mer morderisk matte*, av same forfattar og oversetjar. Denne tar for seg meir geometri, tal og matematisk historie på same vis som i boka over. Av og til vert det meir morosamt enn historisk korrekt, som i dette dømet: Teikneserie der tre menn lurar på kva dei skal kalle talet dei får når dei måler omkretsen til sirkelen med sirkelens diameter og får tre og noko. «*Hvorfor ikke kalle det 'pi'?*» «*Pi?*» «*Hvorfor det?*» «*Hvorfor ikke? Sirkelen deres er rund som en pai. 'Pi' er 'Pai' minus a!*»

Denne boka tek føre seg tal som er vanskeleg å rekne i hovudet med og er difor meir positivt innstilt til kalkulatorbruk.

Bøkene tek for seg mange kjente matematiske problem med humor, samstundes som mykje er seriøst nok til at ein får større innsikt og forståing.

Erling Rangnes,
elev på Framnes vidaregåande skule

Heiberg Solem/Lie Reikerås:
Det matematiske barnet

Caspar Forlag, 2001
283 sider, 289,-

Vi er vel mange som har moret oss litt når egne og andres barn har kommet med utsagn og spørsmål som av oss voksne blir sett på som litt søte kommentarer. Forfatterne av boka *Det matematiske barnet* klarer på en utmerket måte å vise at bak disse utsagnene ligger det både kunnskap, refleksjoner og en søken etter å se sammenhenger. Barn har matematisk kompetanse til både å løse problemer og til å forstå verden rundt seg. Det er bare det at mange voksne ikke «hører» hva barnet sier. Det kan skyldes både manglende fagkompetanse og en manglende forståelse for hva som er matematikk.

Ida Heiberg Solem og Elin Kirsti Lie Reikerås har skrevet en bok som gir alle som er interessert i barn, en mulighet til å komme hele det matematiske barnet i møte. I boka møter vi ikke bare barnet som kan telle på rams, men også barnet som funderer og prøver ut sin logikk. Vi møter barnet som utforsker sin orientering i rommet gjennom å tegne kart, og som opplever rom ved å bygge hytte. Vi møter barnet som lager egne kriterier for klassifisering av objekter og som utvikler en stadig større forståelse av tall og regning. Vi møter barnet som lærer noe om

geometriske figurer ved å legge puslespill eller bruke byggesett. Vi møter barnet som tegner, maler og bretter, og gjennom det viser at det har forståelse for symmetri og rotasjon. Vi møter barnet som både bruker og utvikler matematisk kunnskap gjennom aktiviteter og dialoger.

Boka er en samling med episoder og historier som viser hvordan barn gjennom ulike uttrykksformer viser matematisk kompetanse, men den er samtidig mye mer enn det. Fortellingene blir satt inn i en sammenheng som knyttes både til matematisk fagkunnskap og mer didaktiske momenter. Fagstoffet gir oss en bedre forståelse for hvordan barn tenker, samtidig som fagstoffet viser oss betydningen av å arbeide med en vid forståelse av matematiske begreper. Dette gjøres på en slik måte at man trenger verken å være lærer eller matematiker for å forstå. Vi mener at også foreldre (og andre som omgås barn) vil ha stor glede av denne boka. I tillegg til at forfatterne har systematisert barns arbeid med matematikk, knytter de det også til litteratur som naturlig hører hjemme i barns verden. Her favner forfatterne fra kjente figurer som Ole Brumm og Pippi til vitser og rim og regler. Det gjør at de voksne i barns verden får god inspirasjon og hjelp til å lytte til barn, til å høre hva de uttrykker. Flere av eksemplene viser også hvordan de voksne fører barna videre gjennom å stille spørsmål. Aktivitetsforslagene til slutt i boka er velegnet til å hjelpe voksne med å tilrettelegge for lek, spill og sam-

spill som stimulerer barns bruk og utvikling av matematisk kompetanse.

Boka er ordnet i 10 kapitler. I tillegg er det et appendiks med forslag til aktiviteter knyttet til de enkelte kapitlene. Forfatterne starter med å vise oss hva matematikk er og kan være. De viser til Alan Bishop, som har laget en oversikt på bakgrunn av aktiviteter han mener å finne igjen på tvers av ulike kulturer, og som han mener er grunnlag for utvikling av matematikk. Han formulerer seks fundamentale matematikkaktiviteter; forklaring og argumentasjon, lokalisering, design, telling, måling og lek og spill. Forfatterne forklarer innledningsvis hva som hører med under de ulike områdene, og kapitlene i boka tar så for seg disse områdene på en ryddig og systematisk måte.

«Tjueni, tjueti, tjuelleve» er hovedoverskrift på kapitlet som omhandler tall, telling og tallsystemer. Her får leseren gode eksempler på barns tallbegrep og hvordan de gir uttrykk for det. Vi tas også med bakover i historien for å se hvordan ulike kulturer har holdt oversikt over antall og hvordan dette etter behov har utviklet seg til tallsystemer. Dette knyttes til viktige arbeidsområder med barn slik at de kan utvikle en forståelse av vårt titallsystem. Kapitlet inneholder oppgaver både av praktisk og drøftende art. Samtidig utfordres leseren både til å tenke gjennom hva dette betyr for arbeid i skolen, og til å hente fram egne eksempler, enten gjennom å tenke tilbake eller foreta nye observasjoner.

De andre kapitlene gir oss på samme måte muligheter til å bli kjent med så vel barnet som matematikken. Forfatterne gjør bruk av teori i sine beskrivelser og forklarer matematikkfaglige begreper og emner på en slik måte at leseren aldri mister barnet av syne. Samtidig som boka gir nok fagstoff til at voksne skal klare å ta det matematiske barnet på alvor, tror vi mange vil bli inspirert til å søke videre i bøkene det henvises til i litteraturlista. Det eneste vi kan nevne å ha savnet, er at teoretikere som det refereres til i teksten, også tas med i stikkordslista. Vi koste oss mens vi leste, og mener at boka er et viktig bidrag som pensumbok i lærer- og førskolelærerutdanning. Vi håper at også andre som omgås barn vil lese den. Kanskje en fin gavebok?

*Heidi S. Måsøval
Vivi Nilssen*

Forfatterne underviser i hhv matematikk og pedagogikk ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, avdeling for lærerutdanning og tegnspråk.

Gunnar Gjone

August Ferdinand Möbius og Möbius-båndet

Utgangspunktet vårt er første delen av 1800-tallet og begynnelsen av den grenen av matematikk som går under navnet topologi.

topologi (av gr. *topos*, sted, og *logos*, lære), *mat.*, studiet av de egenskaper ved geometriske objekter som forblir uforandret ved kontinuerlige transformasjoner på objektet. (CAPLEX, internettutgaven)

På denne tida var det et arbeid i gang med å klassifisere legemer. Vi må gå enda noen år tilbake, til Leonard Euler, som presenterte formelen

$$v - e + f = 2$$

der v er antall hjørner, e er antall kanter og f er antall flater til et polyeder. (Et polyeder er et legeme som avgrenses av plane mangekanter) For eksempel for en terning får vi $v = 8$, $e = 12$ og $f = 6$.

Vi kan si at topolgien vokste fram rundt arbeidet med å klassifisere legemer i forhold til

denne formelen. Vi kan observere at formelen ikke gjelder hvis det er et hull gjennom terningen og at den oppfyller kravene til å være et polyeder.:

Vi får da $v = 16$, $e = 32$ og $f = 16$ og får

$$v - e + f = 0$$

Den sveitsiske matematikeren Simone-Antoine-Jean Lhuillier (1750–1840) kom fram til formelen for slike legemer:

$$v - e + f = 2 - 2g$$

der g er antall hull.

Det var flere i kretsen rundt Carl Friedrich Gauss som arbeidet med klassifisering av legemer (polyedre). En av de mest kjente var August Ferdinand Möbius.

August Ferdinand Möbius ble født den 17. november 1790 i Schulpforta i Sachsen. Schulpforta ligger sentralt i Tyskland i nærheten av Leipzig, Halle, Weimar og Jena, som vist på skissen nedenfor.



Figur3: Kartskisse med byene

Dette var en urolig tid i Europa. I nord ekspanderte Preussen, og i Frankrike var den franske revolusjonen i utvikling. Möbius vokste opp i Schulpforta, og 18 år gammel – i 1809 – startet han på universitetet i Leipzig. Han startet først på jus-studier på grunn av familiens ønsker, men etter et semester begynte han å studere matematikk, fysikk og astronomi som han fant mer interessant. I 1813 reiste han til Göttingen for å studere astronomi under Carl Friedrich Gauss. Seinere studerte han også matematikk i Halle. I 1816 ble han utnevnt til «ekstraordinær» professor i astronomi ved universitetet i Leipzig. Han fikk også en stilling ved observatoriet i Leipzig samme år. Å være «ekstraordinær» professor var ikke en stilling med høy akademisk status. Det betydde stort sett at han kunne annonsere forelesninger som han kunne ta seg betalt for. Han fikk en full professorstilling i astronomi i 1844, og ble direktør på observatoriet i 1848. Han ble ved universitetet i Leipzig resten av livet. Han døde 26. september 1868.

Selv om hans største virke var innenfor astronomi er Möbius i dag mest kjent for sine matematiske arbeider

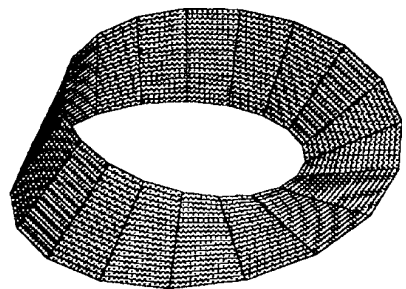
I den perioden som Möbius levde utviklet Tyskland seg til å bli et sentrum for matematikk i Europa. Det var forholdsvis få kjente tyske

matematikere før 1790, men rundt 1870 var Tyskland kanskje det landet med flest kjente matematikere. Berlin og Göttingen var de sentrale stedene.

I 1858 oppdaget han det som seinere ble kalt Möbius-båndet. Det kan konstrueres som følger:

En lager en ring av papirstripen, men vrir båndet slik at D faller sammen med A og C med B . En får da figuren som er gjengitt på frimerket fra Brasil:

Vi kan også få tegnet Möbius-båndet med et dataprogram, som for eksempel *Mathematica*. Ideen er at en linje følger en sirkellinje, samtidig som den roterer rundt. Se for eksempel (Wagon, 1991).



Det interessante med Möbius-båndet er at det bare er en side, og en sidekant. (Tegn en strek på en side og fortsett, en kommer da tilbake uten å ha krysset en sidekant. La også fingeren følge kanten rundt for å se at det bare er en sidekant.)

Möbius var ikke den eneste som arbeidet med disse ideene. En annen matematiker Johann Benedict Listing (1808–1882) arbeidet også sammen med Gauss. Han arbeidet med grunnlaget for topologien (han var også den første som brukte ordet). En kan spørre – både når det gjelder Listing og Möbius – hvor mange av ideene som egentlig gikk tilbake til Gauss. Listing og Möbius arbeidet med de samme ideene, og fra notatene deres kan vi se at begge var inne på en beskrivelse av (det såkalte) Möbius båndet i 1858. Ut fra notatene kan vi også se at Listings opptegnelser ble gjort noen måneder før Möbius. (Fauvel m.fl., 1993)

Vi kan også lage flere bånd ved å vri strimmelen flere ganger før en limer båndet sammen. Disse båndene kan vi si har et slektskap med Möbius-båndet og disse kan også utforskes.

Möbius-båndet i kunsten

Möbius-båndet har vært en inspirasjon for mange kunstnere, og mange steder finner vi skulpturer og bilder inspirert av båndet. Det mest kjente er nok bildet av den nederlandske kunstneren Escher.

De som var tilstede på ICME 9 i Japan kunne også observere Möbius-båndet utenfor en av bygningene på Chiba Institute of Technology:

(

Vi vil også her trekke fram en norsk kunstner Aase Texmon-Rygh som har blitt inspirert av Möbius-båndet. Skulpturen utenfor Henie-Onstad kunstsenter på Høvikodden utenfor Oslo er laget av henne. Den heter «Volta» og ser en nøye etter, er den et «halvt» Möbius-bånd.

Aase Texmon-Rygh er omtalt i tidsskriftet *Prisma* som utgis av Henie Onstad kunstsenter (Sunde, 1999)

Et annet kjent kunstverk er skulpturen «Kolos von Frankfurt» (ca 5 meter høy) av Max Bill (1908–1994). Den kan ses under overskriften «Möbius-båndet» på internett-adresssen som er gitt nedenfor.

Professor Peter Schreiber arbeider ved universitetet i Greifswald. Han har interesse for matematikk og kunst, og er i ferd med å utarbeide en internett-side med kunstverk. Her finnes også opplysninger om Möbius-båndet (og mye annet).

Adressen er <http://www.math-inf.uni-greifswald.de/mathematik+kunst/>

Möbius arbeidet på en rekke andre felter innenfor matematikk og har også fått en tallteoretisk funksjon oppkalt etter seg (se nedenfor). Funksjonen brukes innenfor mer avansert tallteori, men det er også en fin funksjon å eksperimentere med. Möbius μ -funksjon finnes som funksjon i Mathematica. Nedenfor finnes en tabell over noen av verdiene til Möbius-funksjonen.

Litteratur

- Fauvel, J. (m.fl.) (red.) *Möbius and his band*. Oxford: Oxford University Press.
 Sunde, B. (1999) Aase Texmon Rygh Et streif av undring. *Prisma*, nr. 2
 Wagon, S. (1991) *Mathematica in Action*. New York: W.H. Freeman and Co.

Et par andre bøker bør nevnes også:

- Hofstadter, D. (1980) *Gödel, Escher, Bach*. (flere utgaver, bl.a.) London: Penguin
 Rossing, N.K. (2000) *Den matematiske kryddehylle*. Trondheim: Midt Nordisk Vitensenter.

Oppgaver

Vi kan knytte en rekke eksperimenter til Möbius båndet:

1. Klipp opp båndet langs midtlinja – er den flaten som framkommer en-sidig eller to-sidig?
2. Gjenta dette med bånd som er vridd flere ganger.
3. Möbius' μ -funksjon: Finn et positivt heltall n slik at: $\mu(n) + \mu(n + 1) + \mu(n + 2) = 3$

Möbius var også inne på problemstillinger som kan relateres til fire-farge problemet (Rossing 2000). (For en formulering av dette problemet se *Matematikkhistorie i miniatyr*, side 51.) Å fargelegge kart på et Möbius-bånd gir andre og interessante resultater, se for eksempel oppgavene i:

- Scheid, H. (1996) *Elemente der Geometrie*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Möbius' μ -funksjon, og en tabell over noen verdier:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

Annnonse for Texas

Annonce for Casio

Landslaget for matematikk i skolen

Adresse:

Landslaget for matematikk i skolen
Boks 2919, Landås
N-5825 Bergen

E-post: lamis@hib.no

Postgiro: 0819 2039356 **Organisasjonsnr:** 980 401 103

Det overordnede målet for Landslaget for matematikk i skolen er å heve kvaliteten på matematikkundervisningen i grunnskolen, den videregående skole og på universitet/høyskole.

Landslaget skal stimulere til kontakt og samarbeid mellom lærere på ulike utdanningsnivåer og mellom lærere og andre som er opptatt av matematikk.

Styret består av:

Fra grunnskolens barnetrinn
Arne Gravanæs, Trondheim
Mona Røsseland, Samnanger

Fra grunnskolens ungdomstrinn
Gerd Nilsen, Brumunddal
Lisbeth Karlsen, Tønsberg

Fra videregående skole
Bjørn Johansen, Trondheim (leder)
Helge Flakstad, Horten

Fra høyskole/universitet
Ingvill Holden, Trondheim
Kristian Ranestad, Oslo

Medlemskontingent for 2001

Skole/institusjon	500,-
Enkeltmedlem	275,-
Husstandsmedlem	125,-
Studenter	200,-

Tangenten inngår i kontingenten.
(Gjelder ikke husstandsmedlemmer.)

til samtlige medlemmer i LAMIS i løpet av førjulsvinteren. Skoler som ikke er medlemmer får tilbud om å kjøpe heftet.

– Innholdet vil bli tredelt, forteller Ingvill Holden. – En spillturnering, en gruppeoppgave med problemløsning og en kreativ oppgave hvor elevene skal designe en plakett og bruke geometri både i utforming og beskrivelse av plakatten.

Matematikkenes dag i februar 2002

Den første matematikkens dag i Norge nærmer seg. I løpet av uke 6, 4.–8. februar neste år oppfordrer LAMIS alle skoler i landet til å arrangere matematikkdag. Opplegget som er utviklet av Ingvill Holden i samarbeid med resten av styret i LAMIS, vil bli sendt ut

Dagen er foreslått organisert slik at elevene deles inn i lag. I spillturneringen samler deltakerne poeng for sitt lag, matematikkproblemer løses laget i fellesskap og får poeng for lagets løsning. Designoppgaven (som skal løses senere) er også en lagoppgave.

– Opplegget er prøvd ut ved et par skoler og modellen med lag som konkurrerer mot hverandre var vellykket, forteller Holden. – Vi så flere tilfeller av at elever som ellers ikke hevder seg spesielt godt i matte,

Matematisk elevbedrift

Samlet mange poeng for laget i spill-delen. Videre scorer noen godt på den kreative delen av design-oppgaven, mens andre har styrken sin når plakaten skal beskrives ved hjelp av geometriske begrep.

Heftet som lages vil inneholde en del for barneskolen, en del for ungdomsskolen og en for videregående. Dette vil lette differensieringen, man kan se til skoleslaget over eller under og hente tips og ideer derfra.

LAMIS håper at dette markerer starten på en årlig rekke av 'matematikkens dag' i norsk skole. Målsetningen er å utarbeide nye hefter med nye oppgaver til hvert skoleår.

– I år oppfordrer vi alle til å bruke opplegget i uke 6, sier Ingvill Holden. – Dersom oppslutningen blir stor vil vi neste år sette en bestemt dato for matematikkens dag, slik at flest mulig elever i norsk skole jobber med det samme på samme dag. Er ikke noe slikt en fantastisk tanke?

Økonomiavdelingen i bedriften har møte. Deres oppgave er å sette opp et budsjett, slik at markedsavdelingen kan sette en pris på Ingvill Holdens «Matematiske koffert». De må også kontakte produktutviklerne for å kunne anslå utgiftene til det av innholdet som bedriften selv skal produsere. Samtidig jobber ledelsen og lageravdelingen med bestillinger av materiell som skal fylle kofferten.

Vi er på Eberg skole i Trondheim. 6.klassene har enda ikke gitt navn til bedriften sin, men en navnekonkurranse er utlyst. Alle de 39 elevene på trinnet har søkt jobb i bedriften. Ledelsen ble ansatt av lærerne. Deretter ansatte ledelsen folk til lager-, produksjons-, markedsførings- og økonomiavdelingen. De fleste er fornøyd med den jobben de fikk, men noen av dem som havnet i produksjonen, hadde ønsket seg jobber i bedriftens administrasjon. Virkelighetsnær skole ...

– Jeg syns det gikk greit å

ansette de andre, sier en av elevene i ledelsen. – Jeg tror vi var rettferdige og ikke tenkte på hvem som er populær og ikke, men hvem som hadde skrevet gode søknader og hvem som passer til å gjøre hva.

Produktutvikling

Produktet bedriften skal lage, «Den matematiske koffert», er en koffert fylt av utstyr til matematikkundervisningen. Terninger, speil, geobrett, pentominosett, pinner, binders og strikk bestilles fra ulike produsenter. Hanoi's tårn, ulike spinnere, noen geobrett, Annies kloss (et måleredskap utviklet av Annie Selle) og Dudeney's triangel lager elevene selv.

På produksjonsavdelingen foregår det ivrige diskusjoner om hvordan materialet skal se ut.

– Jeg syns at skivene i Hanoi's tårn skal være kvadratiske, sier en. – Da er de lettere å lage.

– Men de runde er jo finere da, mener en annen.

– Vi må i alle fall male Dudeney's triangel, mener noen. – Det er ganske kjedelig dersom det bare har finerefargen.

En elev har fått i spesialoppdrag å lage noen prototyper til geobrett. Han viser stolt fram tre modeller, en i ubehandla finer, en i malt finer og en i malt furu. Selv mener han at furumodellen er best. Resten av gruppa diskuterer og argumenterer. Til slutt er utformingen av alle produktene klare og produksjonsavdelingen må informere markedsføringsavdelingen slik at de kan beskrive produktene i brosjyren. Nå kan produksjonsavdelingen starte arbeidet med å lage utstyret.

Økonomi

Bedriften har ambisjoner om å bli et overskuddsforetak. De

har fått økonomiske garantier fra RENATE, Norsk senter for rekruttering til naturvitenskaplig og teknologiske fag, slik at de er sikret mot konkurs. Økonomiavdelingen jobber med å sette opp budsjett på regneark. En del av produktene må bestilles fra Sverige og USA, prisene oppgis i fremmed valuta, slik at elevene må legge inn formler for omregning.

– Vi har jobbet litt med regneark før, forteller to av bedriftens økonomiansvarlige. – Det er spennende å finne ut hva kofferten vil koste. Vi skal også følge med hvor mye vi tjener. Kanskje overskuddet blir flere tusen kroner!?

Med kofferten følger et tykt hefte med mange forslag til hvordan materiellet i kofferten kan brukes. Heftet inneholder også forslag til aktiviteter som ikke fordrer noe utstyr. Markedsføringsavdelingen tror de har en lett jobb når de skal selge produktet.

Lett å selge

– Vi har brukt mye av det utstyret som finnes i kofferten og prøvd mange av oppleggene til Ingvill, forteller elevene. – De matte-timene er de aller morsomste. Vi liksom skjønner alt bedre når vi gjør ting, ikke bare regner fra boka. Så dersom lærere vil ha fornøyde elever i matte-timene, bør de kjøpe og bruke «Den matematiske koffert».

Lærerne som er ansvarlig for elevbedriftprosjektet, Anne-Gunn Svorkmo, Kari Jørgensen og Arne Gravanoes, tror også at salget skal gå greit.

– Jeg syns at alle skoler bør ha det utstyret som fins i «Den matematiske koffert», sier Arne Gravanoes. – Å ha utstyret lagret i en koffert som alle kan ta med seg til mattetimene, er veldig praktisk.

Bedriften har som mål å ferdigstille koffertene før juleferien. Dersom noen er interessert i

produktet, kan de kontakte bedriften enten via fax 72 54 04 01 eller e-post til

arne.gravanes@trondheim.kommune.no. (NB! ingen bindestrek.)

Pilotprosjekt

Kapasiteten til elevbedriften er selvsagt begrenset. I første omgang planlegger de å produsere og selge 10 koffertene beregnet på mellomtrinnet.

Dersom det viser seg at produksjonen går greit, vil Eberg skole vurdere om de kan produsere flere koffertene.

– Jeg har et bestemt inntrykk av at kofferten er etterspurt, forteller Ingvill Holden, som har utviklet produktet i samarbeid med Nils Kristian Rossing.

– Når jeg holder kurs og har med meg kofferten, får jeg alltid spørsmål om hvor de kan få kjøpt den. Jeg har flere gan-

ger blitt oppfordret til å få en bedrift til å produsere og selge kofferten. Nå er det i ferd med å skje, og med de lave fortjenester elevbedrifter tar, vil prisen bli veldig gunstig.

Prosjektet er et samarbeid mellom LAMIS, RENATE og Skolelabben. Når det er ferdig gjennomført og evaluert, er målet å få igang flere lignende elevbedrifter rundt om i landet.

Målet er at alle 3 utgavene av kofferten, henholdsvis for småskolen, mellomtrinnet og ungdomsskolen, skal produseres.

Dersom noen kan tenke seg å starte produksjon av kofferten som elevbedrift ved sin skole, kan de kontakte (på e-post) **arne.gravanes@trondheim.kommune.no.** (NB! ingen bindestrek.)

Pilotprosjektet er utviklet for mellomtrinnet, men kan lett tilpasses elevbedrifter på ungdomsskolen.

– Nye bedrifter vil trolig kunne startes opp til våren, men vi avventer tilsagn om økonomisk støtte fra KUF, sier Arne Gravanes. – Skoleåret 2002/2003 vil derfor være vel så aktuelt.

«Fra vanske til mestring»

Tone Dalvang

Spesialpedagogisk arbeid med matematikkvansker.

Matematikk-konferanse i Kristiansand 8.–11.oktober 2001

Knapt en uke etter at Forum for matematikkvansker hadde avsluttet en fire-dagers nordisk forskerkonferanse omkring temaet matematikkvansker var det tid for nok et arrangement i regi av Forumet. Denne gangen var det et fordypningskurs innen samme tema. Kurset samlet ca. 120 deltagere fra Sør-Norge. De fleste av deltagerne var fra PPT, men det var også ansatte fra statlige kompetansesentre, skoler og høyskoler. Jeg vil trekke fram noen glimt fra en inspirerende uke.

Olav Lunde pekte på ulike undervisningsmessige forhold ved matematikkfaget som gjør det til et vanskelig fag for en del av elevene. Vi ble oppfordret til å forsterke den språklige delen av matematikklæringen. Svært mange barn med lærevansker har vist en tidlig språkforstyrrelse. For å kunne gjøre bruk av ulike strategier for å forstå matematiske forhold, må elevene ha en viss begrepsforståelse og språkferdighet. Skal en løse proble-

mer må en forstå hva problemet gjelder. Tankene våre arbeider med ord og begreper, og skal vi fortelle andre om våre tanker, trenger vi ord. Dette synes å være et hinder for elever med matematikkvansker, sier Lunde. Han fremhevet hoderegning og problemløsning som arbeidsmetode for å fremme tenkning, og sette ord på tankene i samtaler. Dagligdagse situasjoner i oppgaver og lek gjør matematikken meningsfull for flere elever. Lunde avsluttet med å si at det ikke finnes én metode for å gi tilrettelagt opplæring for elever med matematikkvansker, men at en antageligvis må arbeide på en rekke områder samtidig.

Fra Sverige v/ **Olof Magne** har det blitt innført et nytt begrep i debatten: Livsmatematikk. På bakgrunn av store samfunnsendringer, med nye sosiale og etniske samfunnsvilkår, og innføring av ny teknologi, mener Magne at læreren i større grad må tenke helhet i stedet for små steg. Han mener ma-

tematikken trenger nye aktivitetsformer og flere åpne oppgaver. For elevene vil dette bety at de får utfordringer som logisk tenkning, mer hoderegning, mer hverdagsmatematikk, kalkulatorregning, og at de i mindre grad skal arbeide med oppstilte stykker.

Marit Holm understreket at vanskene i stor grad ligger i opplæringen, ikke hos eleven. Opplæringen må bestå av både ferdighet og forståelse. Kunnskapene må skapes ved å konstruere erfaringer gjennom aktivitet og handling, knyttet til tenkning og refleksjon. Fra disse erfaringene dannes det forståelse for begreper og ord. Hun mente at desto bedre regneprosedyrene og strategiene er automatisert, desto bedre fungerer de som redskap i problemløsning i dagliglivet.

Fra Danmark kom det et svært inspirerende innslag v/ **Helle Alrø** som arbeider med kommunikasjon. Hun vektla verdien av samtalen som tenkeredskap. Hun fikk oss til å se

at måten vi samtaler med elevene er av stor betydning. "På leting etter rett svar" eller "Gjett hva læreren tenker" er tradisjonelle samtaleformer som bør vike plassen for den mer likeverdige dialogen. I dialogen er læreren naturlig interessert, lytter, oppmuntrer og spør etter ting han ikke vet allerede, som f.eks hvordan eleven har tenkt. Denne formen for samtale vil avklare forståelser og bidra til å utvikle nye perspektiver og handlemåter.

Ronald Bradal viste fra en undersøkelse han har foretatt, hvilke behov for skolematematikk som etterspørres i yrkeslivet. På et grossistlager kunne en starte uten noen skolematematikk, også på et laboratorium kunne en klart seg med et mindre omfattende skolepensum. Blant ingeniørene var skolematematikken et nødvendig grunnlag for å tolke data, beregne og beskrive prosesser, selv om selve beregningene stort sett utføres av datamaskiner. På bakgrunn

av undersøkelsen konkluderte Bradal med at de fleste yrker krever mindre matematikk i dag enn tidligere, men at noen få høyspesialiserte yrker behøver større kompetanse enn noen gang. Han stilte spørsmål ved om ikke dette burde få betydning for innholdet i opplæringen.

På bakgrunn av et stort antall elever med lærevansker i matematikk som **Snorre Ostad** har arbeidet med, peker han på nødvendigheten av at kunnskapene må ha fleksibel karakter. Han viser til denne elevgruppens strategifattigdom, og mener at det ikke er nok å konkretisere, eller å forankre oppgavene til praktisk virkelighet. Han peker på språkets betydning i form av gode begreper, og et allsidig innhold. Begrepene må internaliseres ved å lese dem med lydstyrke som endres fra normal til dempet og til slutt med hviskende stemme.

Fra Vesterålen fikk vi et innblikk i et omfattende arbeid med kartlegging av elevenes

kognitive funksjoner. **Fritz Johnsen** bruker opp til 13 timer med ulike kliniske testredskaper for å kunne diagnostisere en elev med spesifikke lærevansker. Han kunne vise at disse elevene ofte fikk lik profil med for eksempel en wisc-test, til tross for at elevene var svært ulike, og følgelig hadde behov for ulik pedagogisk tilrettelegging. Han mente matematikkvanskene i større grad var et resultat av denne forskjellen i menneskelige innlæringsbehov enn av lavt evnenivå hos disse elevene.

I tillegg til hovedforedragene var det i mindre grupper fremlegging og diskusjon av en rekke teorier, prosjekter, læremidler og case.

Forum for matematikkvansker består av fra Sørlandet kompetansesenter: Olav Lunde, Jarl Formo og Tone Dalvang i samarbeid med Høyskolen i Agder ved Otto Bekken.