Nim – et spill med pinner

Presentasjon av ulike varianter av det gamle spillet av tyrkisk opprinnelse.

❀ til ❀❀❀❀

Alle varianter kan spilles av små og store. Strategien for den aller enkleste varianten kan forstås av elever på mellomtrinnet, mens de vanskeligste kan være i tøffeste laget selv for elever i videregående skole.

Nim med én bunke

Multiplikasjon, divisjon

❀ til ❀❀❀

Dere trenger 21 fyrstikker eller pinner.

Ingvill Holden, NTNU

Mål for spillet:

Å ta den siste pinnen fra bunken.

Beskrivelse av spillet:

Spillet er for to spillere. 21 pinner legges i en bunke mellom spillerne. De bestemmer hvem som skal begynne å trekke pinner fra bunken. De skal fjerne én eller to pinner fra bunken etter tur. Den som har tur når det ikke er flere pinner igjen i bunken, har tapt.

Kommentar:

Du bør utfordre elevene til å lete etter en strategi. Noen elever vil oppdage strategien ganske fort. Det er lurt å be dem om å la være å røpe strategien for hverandre. De som har skjønt det, kan utfordre andre i klassen til å spille mot dem. Etter hvert vil flere og flere se hvordan de kan vinne. Allikevel er det ikke sikkert de forstår *hvorfor* strategien virker. Da er det flott å la elevene forklare sin egen tenkemåte for de andre i klassen. Ei jente i 4. klasse sa det slik:

«Hvis jeg slipper å begynne, kan jeg vinne. Når hun tar 1, tar jeg 2, og når hun tar 2, tar jeg 1. Det er fordi 3 mange ganger etter hverandre til slutt blir 21!»

Når elevene har forstått dette spillet, kan dere endre reglene. Neste gang kan det være lov til å ta 1, 2 eller 3 pinner. Dere kan også variere antall pinner i haugen (se nedenfor).

Nim med én bunke – variant

Heidi Dahl og Ørjan Pedersen, matematikkstudenter ved NTNU i Trondheim.

❁❁❁❁

Beskrivelse av spillet

Dette spillet har som hensikt å fremme matematisk resonnering for barn i alle aldre. Spillet er for to spillere. Spillerne får utdelt n fyrstikker til sammen, som legges ut på et bord. Det er nå det blir spennende! Spillerne blir enige om et bestemt antall fyrstikker, r der $r < n$, som spillerne har lov å trekke i hver omgang. Poenget med spillet er å få tatt den siste/de siste fyrstikkene.

Strategi for å vinne:

Tilfelle 1: n er delelig med $r + 1$

Du lar motparten begynne spillet. Sørg for at det i hver runde blir tatt $(r + 1)$ fyrstikker, dvs. tar motparten 1 tar du r, tar motparten 2 tar du $(r – 1)$, …, tar motparten r tar du 1. Da vil det ligge $(r + 1)$ fyrstikker igjen på bordet når det er motpartens tur. Han *må* ta minst en av dem, men kan ikke ta alle $(r + 1)$. Dermed gjenstår mellom 1 og r fyrstikker når det blir din tur. Du tar alle, og du har vunnet!

Tilfelle 2: n er ikke delelig med r+1, og gir rest a ved deling, $0 < a < (r + 1)$.

Du starter. Ta a fyrstikker. Da gjenstår $(n – a)$ fyrstikker, og $(n – a)$ er delelig med $(r +1)$. Det er nå motpartens tur, og du følger fra nå av strategien beskrevet i tilfelle 1. Dette vil igjen føre deg til en sikker seier. Dersom du skulle komme skeivt ut, for eksempel ved at motparten insisterer på at du skal starte når n er delelig med $(r +1)$, foreslår vi følgende strategi: Ta færrest mulig fyrstikker. (Det gir deg muligens flere trekk.) Prøv å få det til å ligge $k(r +1)$ fyrstikker igjen på bordet når det er motstanderens tur. Da er du (forhåpentligvis) i tilfelle 1. Da har du vunnet igjen. Gratulerer!

Nim med to bunker

Arne B. Sletsjø, Universitetet i Oslo

❁ til ❁❁❁❁

Spillet er for to spillere. Fordel pinner i to bunker med et vilkårlig antall pinner i begge bunkene. Spillerne trekker annen hver gang, og de kan trekke så mange fyrstikker de vil, men bare fra én bunke. Den som trekker de siste pinnene, vinner spillet.

Beskrivelse av vinnerstrategi:

❁❁ til ❁❁❁❁

Dette er et rent strategispill med full åpenhet. Det er ikke mulighet for uavgjort. Det betyr at det finnes en vinnerstrategi for en av spillerne. En generell vinnerstilling vil være to bunker med like mange fyrstikker i hver. Strategien er da å gjøre det samme som motspilleren. Dermed kan man uansett hva motspilleren gjør opprettholde vinnerstrategien. Til slutt er motspilleren tvunget til å ta resten av den ene bunken og har tapt spillet. (Se også nedenfor, Ketil Bergesen, Høgskolen i Bergen)

Nim med flere bunker

Arne B. Sletsjø, Universitetet i Oslo

Spillet er for to spillere. Fordel pinnene i et passende antall bunker med et vilkårlig antall pinner i hver bunke. Spillerne trekker annen hver gang, og de kan trekke så mange pinner de vil, men bare fra én bunke. Den som trekker de siste pinnene, vinner spillet.

Beskrivelse av vinnerstrategi:

❁❁❁ og ❁❁❁❁

Dette er også et strategispill med full åpenhet, men det er vanskeligere å forstå hva man må gjøre for å være sikker på å vinne. Her kommer beskrivelsen: Gjør om antall pinner i hver bunke til totallsystemet. Summer modulo 2 de forskjellige antallene som om tallene skulle være vektorer (summér 1-ere, 2-ere, 4-ere, 8-ere, osv). Hvis summen blir null-vektoren, har vi en vinnerstilling. I praksis kommer vi inn i vinnerstillingen på følgende måte. Tell opp hver bunke i totallsystemet og legg sammen vektorer modulo 2. Hvis vi ikke er i en vinnerstilling, får vi et svar forskjellig fra null-vektor. Gjør om dette svaret fra vektor til tall og fjern et passende antall pinner fra en av bunkene. Eksempel: Tre bunker med 8, 5 og 3 er ingen vinnerstilling. I totallsystemet skriver vi disse tallene som 1000, 101 og 11. Summen blir 1112 som ikke består av bare partall, og derfor ikke er null-vektoren. Fjerner vi 2 fra den første bunken blir tallene 6 (110), 5 (101) og 3 (11). Til sammen 222, og vi har en vinnerstilling. Uansett hva motstanderen gjør nå, vil der dukke opp et oddetall i summen. La oss anta et motstanderen for eksempel tar 2 fra den største bunken. De tre tallene blir da 4 (100), 5 (101) og 3 (11), som gir sum 212. Fjerner vi 2 fra den minste bunken, blir summen 202, som gir en ny vinnerstilling.

Det er mange som har vært opptatt av å forstå dette enkle spillet. Jeg vil ta med deler av bidraget som ble sendt inn av Ketil Bergesen.

Den vinnende strategi for Nim

Ketil Bergesen, Høgskolen i Bergen

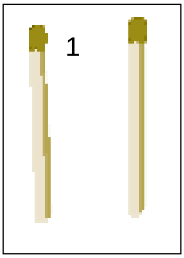
Vi skal se på det mest generelle spillet og prøve å «knekke koden».

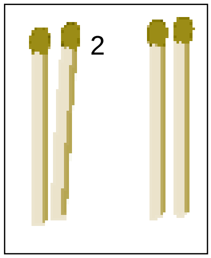
Et spørsmål til avklaring først:

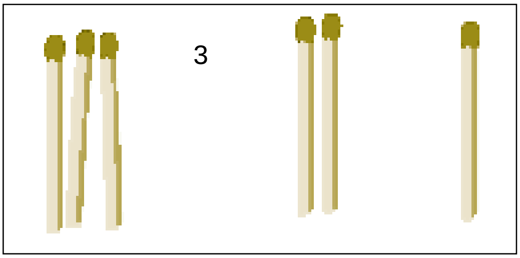
Er det slik at man alltid kan vinne dersom motstanderen begynner? Eller mer generelt, er det slik at gitt en vilkårlig startposisjon så kan du alltid vinne hvis du får bestemme hvem som skal begynne? Følgende utsagn er ikke uvanlig: «I starten er det ikke så nøye hva man gjør, det er på slutten man må begynne å tenke».

Vi skal se at det *er* nøye fra første trekk.

Før vi går videre trenger vi et felles språk. Når du har gjort et trekk står du kanskje til gevinst. Dersom en slik posisjon fins kaller vi den en vinner. Eksempelvis er følgende tre situasjoner vinnere:







Situasjoner med én bunke er lette: Alle er tapere, motstanderen tar ut alle og har vunnet. Situasjoner med to bunker: En sikker vinner er situasjon 1); motstanderen må ta den nest siste og du den siste.

Enhver situasjon som kan gjøres om til (1, 1) i et trekk, for eksempel (1, 5) er følgelig en *taper*. (2, 2) kan derimot *ikke* gjøres om til (1, 1) i et trekk og er en vinner. Tilsvarende er alle situasjoner på formen (n, n) vinnere da man kan «kopiere» motstanderens trekk og holde «balansen» med like mange i hver haug. Før eller siden må motstanderen overlate deg en null-k-situasjon.

Tilsvarende kan vi tenke om situasjoner med tre, fire, … mange hauger. Vi kan jobbe «i revers» og finne at for eksempel (1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7) og (2, 4, 6) alle er vinnere.

I kartleggingen av vinnerne så jeg et slags mønster, for eksempel er alle tre-bunkere på formen $(1, 2n, 2n+1)$ vinnere. Det samme for $(3, 4n+1, 4n+2)$ og for (6, 8n+3, 8n+5). Vinnerne så ut til å gruppere seg på en måte som hadde med toerpotenser å gjøre.

Eksempel:

Følgende situasjon er gitt: 3, 5, 7, 28, 23. Vi skriver opp disse i en tabell som viser hvilke toer-potenser som inngår for hvert tall.

	16	8	4	2	1
3	0	0	0	1	1
5	0	0	1	0	1
7	0	0	1	1	1
28	1	1	1	0	0
23	1	0	1	1	1
Sum	2	1	4	3	4

For å få til en vinner, må alle summene være partall. Da sier vi at det er *balanse*.

Vi ser det er ubalanse i 8-er blokka og 2-er blokka. Tallet 28 er det eneste tallet som har en 8-er. Vi endrer tallene i denne raden slik at vi får partall som sum for hver blokk:

	16	8	4	2	1
3	0	0	0	1	1
5	0	0	1	0	1
7	0	0	1	1	1
x	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1
Sum	2	0	4	4	4

Det vi ønsker å stå igjen med er tallet $x = 16 + 4 + 2 = 22$, vi tar altså ut 28 – 22 = 6 fra haugen med 28 i og har skaffet oss balanse og dermed seieren.

Vi har sett at vi finner vinnerstrategien ved å betrakte binærutviklinga til tallene (tallene i totallsystemet). Kunne vi like gjerne ha brukt 3-tallsystemet eller enda bedre titallsystemet som vi er vant til å regne med? (Se også http://home.hib.no/al/Matematikk/spill/Nimstrategi.html).

Så håper jeg mange løper og kjøper fyrstikker med det samme! Måtte alle vinne!

Pyramiden

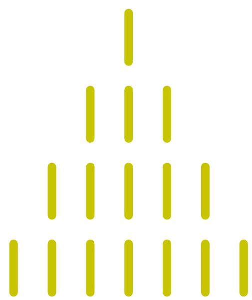
Begrepsforståelse, telling

Dere trenger seks pinner eller fyrstikker.

Henrik Kirkegaard, lærer ved Flisnes skole, Ålesund

Dette spillet er for to spillere. Spillerne fjerner etter tur 1, 2 eller 3 streker (eller pinner) om gangen i samme rekke og ved siden av hverandre. Han som får siste strek har tapt.

Strekene (eller pinnene) skal plasseres i en «pyramide»:



Kommentar:

Dette er en annen variant av spillet Nim. Legg merke til at her er det om å gjøre å *ikke* ta siste pinne. Dessuten må pinnene ligge ved siden av hverandre. Prøv om dere kan finne strategien for dette spillet!