

Rolf Venheim

# Snøflak og regneark

Matematikkplanen i L97 legger innføring i bruk av regneark til ungdomstrinnet, nærmere bestemt 8. klasse:

## Hovedmomenter

### 8. klasse

*I opplæringen skal elevene*

- bli kjent med hovedprinsippene for regneark og gjerne få erfaringer med bruk av regneark på datamaskin

*L97 side 167*

Men det er i L97 lagt opp til arbeid både med geometriske mønstre og med tallmønstre mye tidligere enn det, og ved slikt arbeid kan regneark mange ganger være et hendig hjelpemiddel. Og det gir muligheter til å gjøre utforskinger som ellers ville forekomme nær sagt håpløse på det trinnet. Vi vil se på et eksempel i dette notatet, et eksempel som ble brukt ved et lite kurs på Nærbø skole for lærere i Hå kommune 19. mai 1999, hvor fokus var på matematikk som kreativ og estetisk virksomhet.

Vi tar som bakgrunn med sitater fra hovedmomenter for tre klasser på mellomtrinnet i L97:

### 5. klasse

#### *Geometri*

*I opplæringen skal elevene*

- lage figurer, former og mønstre, og arbeide med å finne ut av egenskaper ved dem

### 6. klasse

#### *Tall*

*I opplæringen skal elevene*

- undersøke og utforske tallmønstre, f.eks. ved hjelp av lommeregner og datamaskin, oppdage og beskrive egenskaper

### 7. klasse

*I opplæringen skal elevene*

- få videre trening i å beregne omkrets og areal av firkanter, trekkanter og andre mangekanter. Undersøke og beregne areal av sammensatte figurer

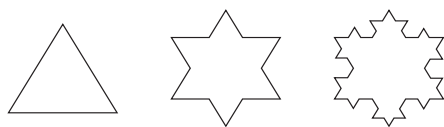
## En fraktal

*Fraktaler* er spennende geometriske framtoninger. En viktig egenskap ved fraktaler er at figuren gjentar seg i en del av figuren, men i mindre målestokk. Vi finner det tilnærmet i bregner, blader, trær, skyer, sandkorn, krystaller, snøflak og i mange andre figurer. Mange blomster, blader eller trær vokser slik at et enkelt grunnmønster gjentas. En fraktal kan sies å være en figur hvor hele figuren er formlik med en del av den. Vi kan dermed bare tegne tilnærmede fraktaler.

En kjent figur som har sekskantsymmetri, er *von Kochs snøflak* (laget i 1904 av den svenske matematikeren Helge von Koch 1870–1924). Fraktalen kommer fram ved at vi

- 1 starter med en likesidet trekant
- 2 deler hver side i tre like deler og lager en likesidet trekant utenpå den midtre tredelen av hver side

- ▶ 3 gjentar trinn 2
- 4 og gjentar igjen og igjen



Figur 1

Figur 2

Figur 3

Det er en fin oppgave å lage disse tre figurene ved å brette og klippe.

To spørsmål er nærliggende: Hvordan går det med omkretsen av snøflaket i en slik prosess, og hvordan går det med arealet? Dette er spørsmål som vi kan besvare med helt tradisjonelle metoder i matematikken. Når det gjelder omkretsen, er saken egentlig ganske grei, men det blir mer krevende med arealet. De som synes dette blir for tungt fordøelig, kan bare nøye seg med å registrere nettopp *det*, og så se hvor mye lettere tilgjengelig det blir ved å bruke et regneark.

### Omkrets

Vi setter sidelengden lik 1 i den første, likesidede trekanten. Da ser vi at hver side i denne blir i figur 2 erstattet av fire biter som hver er en tredel av den opprinnelige sidelengden. Det betyr at omkretsen i figur 2 blir  $\frac{4}{3}$  ganger så lang som i figur 1. På samme måte fortsetter det fra figur 2 til figur 3 osv. Altså kan vi sette

$$O_1 = 3$$

$$O_2 = \frac{4}{3}O_1 = \frac{4}{3} \cdot 3 \text{ (som er lik 4)}$$

$$O_3 = \frac{4}{3}O_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 3 \text{ (som er lik } \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \approx 5,3 \text{)}$$

$$O_4 = \frac{4}{3}O_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot 3$$

og så videre.

Omkretsen øker med  $\frac{1}{3}$  eller ca 33 % fra en figur til den neste. Vi kan få så stor omkrets vi vil bare ved å lage mange nok sider. Omkretsen vokser over alle grenser når antall sider øker.

Vi kan organisere et regneark til å gjøre utreg-

ningene. Regnearket viser hvordan antall sider vokser, sidelengder avtar og omkrets vokser:

	A	B	C	D
1	Fig nr	Ant sider	Lengde	Omkrets
2	1	3	1	=B2*C2
3	2	=B2*4	=C2/3	=B3*C3
4	3	=B3*4	=C3/3	=B4*C4
5	4	=B4*4	=C4/3	=B5*C5
6	5	=B5*4	=C5/3	=B6*C6
7	6	=B6*4	=C6/3	=B7*C7
8	7	=B7*4	=C7/3	=B8*C8
9	8	=B8*4	=C8/3	=B9*C9

Her er tallverdiene:

Fig nr	Antall sider	Sidelengde	Omkrets
1	3	1,0000	3,00
2	12	0,3333	4,00
3	48	0,1111	5,33
4	192	0,0370	7,11
5	768	0,0123	9,48
6	3072	0,0041	12,64
7	12288	0,0014	16,86
8	49152	0,0005	22,47

Altså: Selv om hver side etter hvert blir ganske liten, blir sidene så enormt mange at omkretsen vokser ubegrenset.

### Areal

Nå blir det mer krevende å foreta en tradisjonell utregning – og tilsvarende mye lettere med et regneark, og så får vi nesten like overbevisende resultat.

Igen gjør vi det enkelt ved å sette arealet av den første trekanten lik 1. Vi velger altså denne trekanten som *arealenhet*. En bisetning om begrepet areal: Areal er utstrekningen til et flateområde i forhold til et (i prinsippet fritt valgt) referanse-flateområde. Dessverre kan selve arealbegrepet ofte drukne i en flom av *formler for beregning* av arealer til spesielle figurer.

Vi ser at figur 2 har fått som tillegg tre nye trekantene som hver har størrelse  $\frac{1}{9}$  av den første.

Hver av tilleggstrekanter i neste figur er alltid  $\frac{1}{9}$  av de forrige tilleggstrekanter. Vi får én tilleggstrekant for hver av sidene i den foregående figuren. Og hver figur har altså fire ganger så mange sider som den foregående. Dermed blir samlet areal for hver figur

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = A_1 + 3 \cdot \frac{1}{9} \quad (\text{som er lik } 1\frac{1}{3} \approx 1,3)$$

$$A_3 = A_2 + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2}$$

$$A_4 = A_3 + 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{9^3}$$

og så videre.

Vi ordner dette litt og fortsetter til ledd nummer  $n$ .

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = A_1 + \frac{1}{3}$$

$$A_3 = A_2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}$$

$$A_4 = A_3 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

$$A_5 = A_4 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^3$$

...

$$A_n = A_{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}$$

Hvis vi her adderer alle venstresidene og setter svaret lik summen av alle høyresidene, vil leddene  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$  opptre både på venstre og på høyre side. Disse kan vi derfor stryke, og vi står igjen med at

$$A_n = 1 + \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} \right]$$

I hakeparentesen har vi ei geometrisk rekke med

sum  $\frac{9}{5} - \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ . Det betyr at

$$A_n = 1 + \frac{1}{3} \cdot \left[ \frac{9}{5} - \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right] = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

Hvis nå  $n$  vokser til et fryktelig stort tall, kan vi se bort fra leddet etter minuset, det konvergerer mot null. Dermed har vi kommet fram til at arealet av alle von Kochs snøflak holder seg under  $\frac{8}{5} = 1,6$ , og arealet nærmer seg 1,6 som grense når sidetallet vokser.

Til slutt ser vi på det samme med regneark. Da blir også dette så enkelt at det gjerne kan gjennomføres på grunnskolens mellomtrinn, noe vi selvsagt ikke kunne komme på å prøve med den tradisjonelle metoden.

En måte å utvide regnearket for omkrets til også å omfatte areal kunne være som her: ▶

	A	B	C	D	E	F
1	Fig nr	Antall sider	Sidelengde	Omkrets	Minste trekant	Samlet areal
2	1	3	1	=B2*C2	1	1
3	2	=B2*4	=C2/3	=B3*C3	=E2/9	=F2+B2*E3
4	3	=B3*4	=C3/3	=B4*C4	=E3/9	=F3+B3*E4
5	4	=B4*4	=C4/3	=B5*C5	=E4/9	=F4+B4*E5
6	5	=B5*4	=C5/3	=B6*C6	=E5/9	=F5+B5*E6
7	6	=B6*4	=C6/3	=B7*C7	=E6/9	=F6+B6*E7
8	7	=B7*4	=C7/3	=B8*C8	=E7/9	=F7+B7*E8
9	8	=B8*4	=C8/3	=B9*C9	=E8/9	=F8+B8*E9

- Vi trenger altså ingen kompliserte formler her. Og bare vi har gjort klar for figurene 1 og 2, kan resten gjøres ved å kopiere nedover. De tallmessige resultatene er også overbevisende – arealet konvergerer meget hurtig mot 1,6:

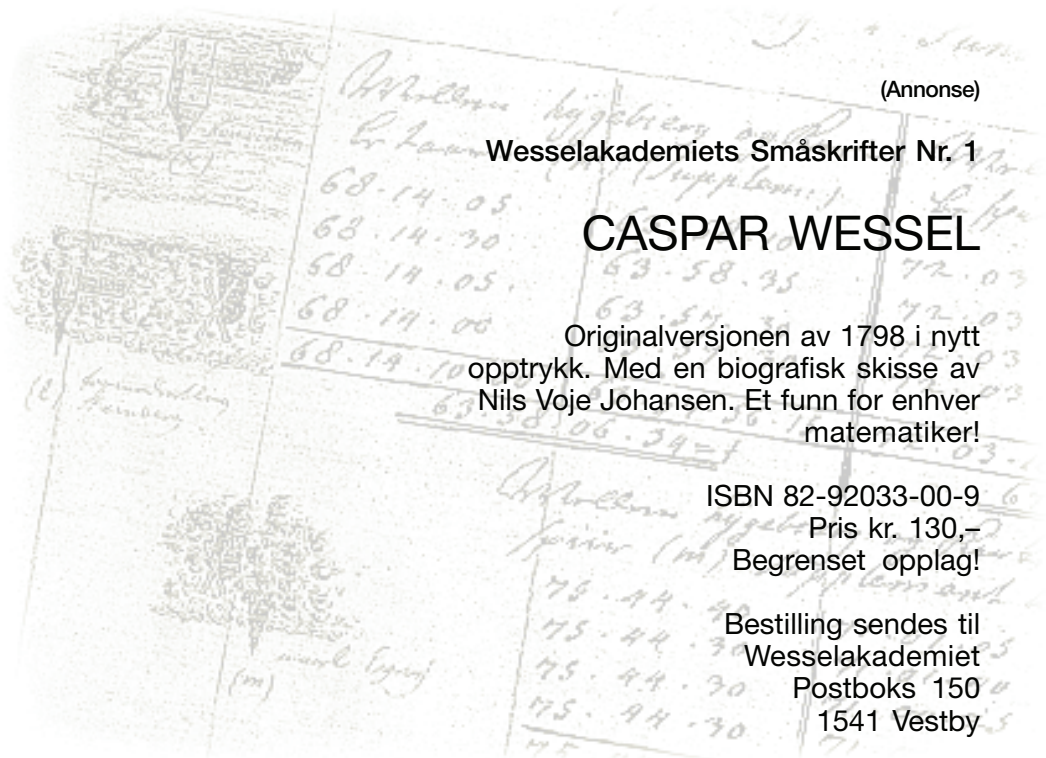
Fig nr	Antall sider	Side-lengde	Omkrets	Minste trekant	Samlet areal
1	3	1,0000	3,00	1,0000000	1,000
2	12	0,3333	4,00	0,1111111	1,333
3	48	0,1111	5,33	0,0123457	1,481
4	192	0,0370	7,11	0,0013717	1,547
5	768	0,0123	9,48	0,0001524	1,577
6	3072	0,0041	12,64	0,0000169	1,590
7	12288	0,0014	16,86	0,0000019	1,595
8	49152	0,0005	22,47	0,0000002	1,598

## Referanser

Boyer, C. B. (1968): A History of Mathematics, Wiley Int Ed

Breiteig, T & Venheim, R (1998): Matematikk for lærere 1, 3. utgave, Tano-Aschehoug

KUF (1996): Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen



(Annonse)

Wesselakademiets Småskrifter Nr. 1

# CASPAR WESSEL

Originalversjonen av 1798 i nytt opptrykk. Med en biografisk skisse av Nils Voje Johansen. Et funn for enhver matematiker!

ISBN 82-92033-00-9  
 Pris kr. 130,-  
 Begrenset opplag!

Bestilling sendes til  
 Wesselakademiet  
 Postboks 150  
 1541 Vestby