

Kjartan Tvette

Solens gang II

(–fortsettelse av artikkelen *Solens gang* i Tangenten 3/99. Det vil være en fordel å ha denne for hånden)

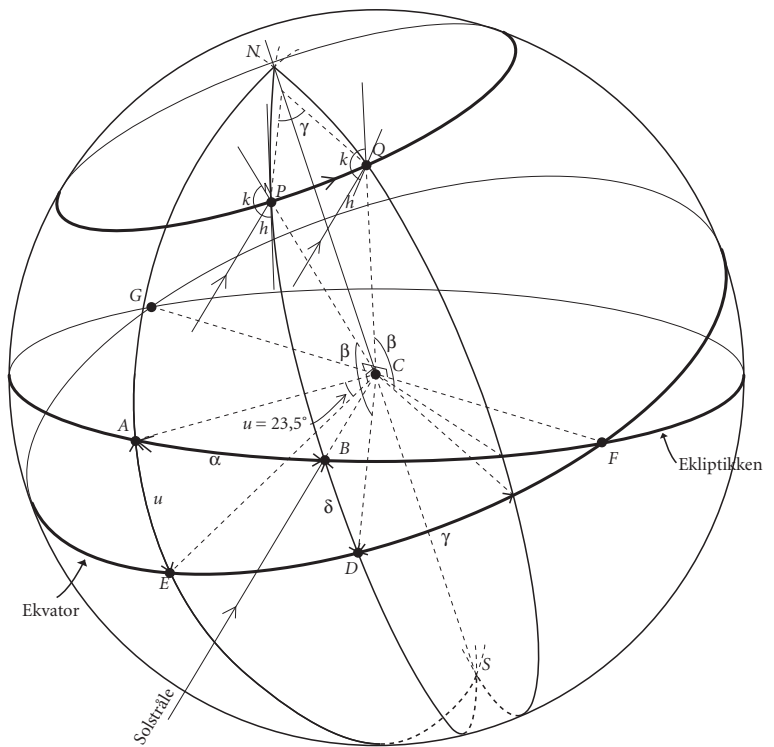
– Hei, har du kommet noe videre med *solhøydeproblemet* vårt?

– Vel, jeg har prøvd litt, men jeg synes det er vanskelig å få tegnet en god figur som kan brukes for en generell årstid.

– Samme her. Etter mye strev har jeg laget denne figuren, som kanskje ikke er så verst (figur 9).

– Huff da! Her var det mye rart.

– Jo jo, men jeg skal forklare, – tror nok du vil synes at figuren vinner seg ved nærmere bekjentskap: Du ser jordkloden med jordaksen, nordpolen N , sydpolen S og ekvator-sirkelen. Dessuten har jeg tegnet en sirkel jeg kaller *ekliptikken*. Denne er viktig. Du kan tenke deg ekliptikkplanet, altså jordas baneplan rundt sola, som et tynt papirplan som inneholder både solas og jordas sentrum. Til en hver tid vil jordkula skjære ut et sirkelrundt hull av dette papirplanet. Og jorda roterer omkring sin nord–syd akse inne i dette hullet, én gang pr. døgn. Min ekliptikksirkel er randa til



Figur 9

dette hullet, (og altså ikke en fast sirkel på selve jordkula).

Egentlig går jo vi, dvs. jorda, rundt sola, men for vårt problem kan vi tenke oss at sola istedet går rundt jorda, én gang på et år. Hvis du tegner solstrålene fra sola mot jordas sentrum gjennom et helt år, så treffer disse jordkula akkurat i punkter langs denne ekliptikksirkelen min. Midtsommers,

da jordaksen «vender inn mot sola», treffer solstrålen ekliptikksirkelen i punktet A , dvs. linjen CA angir nå retningen til sola. Et kvart år før har vi vårjevndøgn, og sola befinner seg da i forlengelsen av linjen CG . Ved høstjevndøgn er sola å finne i CF sin retning. Disse forholdene kan også anskueliggjøres med en globus og en tenkt sol et stykke unna.

Vinkel $u =$ vinkel ACE er ekvatorplanets helning med ekliptikken, og er lik ca. $23,5^\circ$ som før nevnt.

Tenk deg nå at året er kommet litt ut på sommeren, og at retningen til sola ved dette tidspunktet faller langs linjen CB . Min vinkel $\alpha =$ vinkel ACB måler hvor lenge etter sommer-solhverv dette er. ($\alpha = 360^\circ$ svarer altså til et helt år, 365 døgn.) Punktet P er et sted på jorda med breddegradstall β . Gjennom ett døgn gjør P en rotasjon om jordaksen, langs sin breddegradssirkel. Men akkurat ved dette tidspunktet av døgnet, som figuren er tegnet for, og altså ved årstidspunktet α , er det midt på dagen i P , som du ser.

– Hm ... Javel. Meridianplanet til P inneholder akkurat nå sola, ja.

– Det første målet jeg satte meg var å prøve å finne midtdagssolhøyden h for stedet P i denne stillingen. Jeg har tegnet inn en hjelpevinkel δ , som er lik vinkel BCD . Vinklene k og h for punktet P danner tilsammen 90° , og som du ser er vinklene k og $\beta - \delta$ like store, for de er samsvarende ved parallelle linjer, nemlig solstrålene som treffer B og P . Dermed får vi:

$$(5) \quad h = 90^\circ - k = 90^\circ - (\beta - \delta) = 90^\circ + \delta - \beta$$

som gjelder når $\beta \geq \delta$.

– Javisst. Det der er jo også en pen, direkte generalisering av vår tidligere formel (3). δ er jo lik $u = 23,5^\circ$ når $\alpha = 0^\circ$.

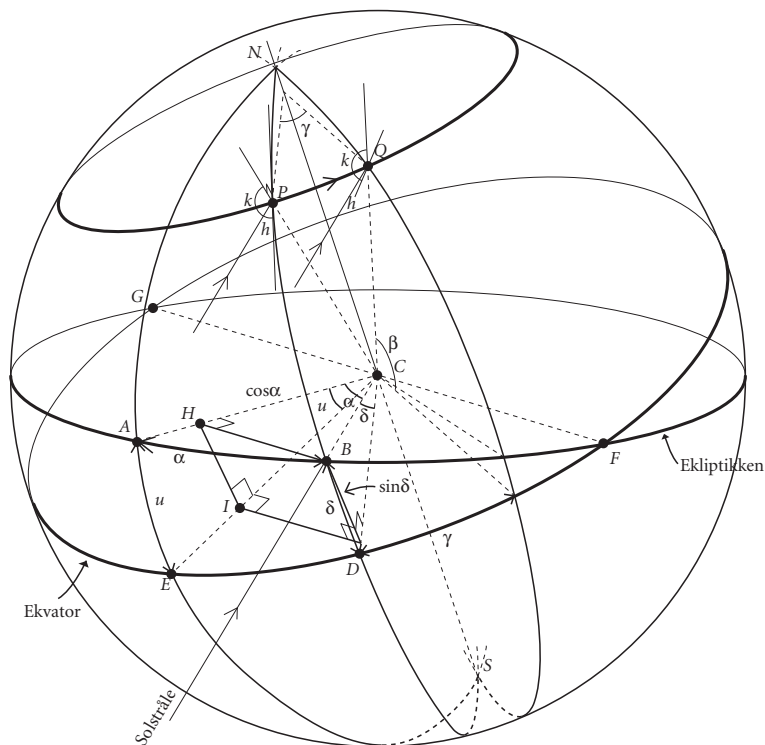


Figure 10

– Nettopp. Men jeg skulle gjerne hatt hjelpevinkelen δ uttrykt ved årstidsvariabelen α , og satt det inn i (5).

– Det burde være mulig. Vi ser jo på fig. 9 f. eks. at δ må avta fra $u = 23,5^\circ$ ned til 0° når α øker fra 0° til 90° .

– Men dessuten ville det jo gjenstå å finne solhøyden h for stedet P på et vilkårlig tidspunkt av døgnet, f. eks. etter at jorda og P har rotert en viss vinkel γ omkring jordaksen til posisjonen Q som vist på figuren min. $\gamma = 0^\circ$ svarer da til midtdag og $\gamma = 360^\circ$ til at et helt døgn på 24 timer er gått. Jeg tenker meg da at solen stadig stråler inn mot linjen BC .

– Ja, ok. Men nå blir det ikke så enkelt å se vinklene k og h rent geometrisk, for solstrålen mot Q ligger jo ikke lenger i Q sitt meridianplan ...

– Hør, – jeg tror jeg har en ide: Vinkelen k for stedet Q må være lik vinkel BCQ , for solstrålene til B og Q er parallelle linjer. Forestill deg nå trekant BCQ , og tenk deg at vi hadde funnet lengdene av alle sidene i denne. Da kunne vi finne vinkel BCQ (og altså vinkel k) ved hjelp av *cosinussetningen*. ►

- – Ja ha! Og CB og CQ er jo begge lik jordradien.
- Men BQ da?
 - La oss nå prøve litt hver for oss igjen. Hvis du ser nærmere på sammenhengen mellom vinklene α og δ så kan jeg forsøke meg på BQ . Klarer vi disse to jobbene skulle hele solhøydeproblemet i prinsippet være løst!

...

– Hei igjen, – hør på denne observasjonen min: Hvis du står oppe på et skrått hustak og så beveger deg bortover taket i en kurs parallelt med takrenna, så vil du hele tiden befinne deg like høyt over loftgulvet! Dette benytter jeg til å finne δ !

– ??

– Figur 10 (forrige side) tar utgangspunkt i vår tidligere figur 9.

Du husker definisjonene av sinus og cosinus til en vinkel. Jeg setter jordradiens lengde til 1, og kan da tegne inn sind som katet i en rett-vinklet trekant, som vist. Så «spaserer» jeg fra B parallelt med «takrenna» FG til skjæringspunktet H med linja CA , og feller ned en normal herfra til punktet I på linja CE . Da er H like høyt over ekvatorplanet som B , med andre ord $HI = \sin\delta$. Videre er vinkel $BHC = 90^\circ$ fordi CA står vinkelrett på FG . Nå får vi:

$$\cos\alpha = CH/CB = CH,$$

og dermed

$$\sin u = HI/CH = HI/\cos\alpha,$$

som gir

$$HI = \sin u \cdot \cos\alpha.$$

Altså har vi:

$$(6) \quad \sin\delta = \sin u \cdot \cos\alpha$$

eller om vi vil

$$\delta = \sin^{-1}(\sin 23,5^\circ \cdot \cos\alpha).$$

Dette kan vi sette inn i vår formel (5), og får der-

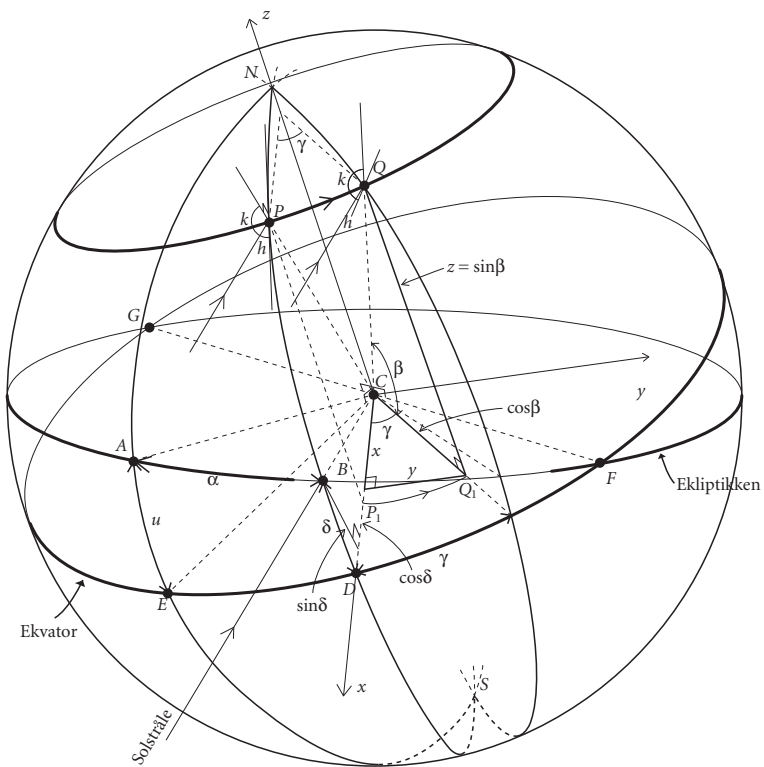
med en generell formel for *midtdagssolhøyden* h for et sted P med vilkårlig breddegradstall β og tid på året, α :

$$(7) \quad h = 90^\circ + \sin^{-1}(\sin 23,5^\circ \cdot \cos\alpha) - \beta,$$

som gjelder for $\beta \geq \delta$

(For $\beta < \delta$ må tegnene + og – bytte plass). Det er forøvrig lett å se at denne formelen tar oss tilbake til vår tidligere formel (3) når $\alpha = 0$.

– Godt arbeid! Nå vil jeg vise deg hvordan jeg faktisk har klart å bruke cosinussetningen på trekant BCQ for å finne vinkel BCQ , dvs. vinkel k for punktet Q . Se her på min variant av figur 9 (figur 11).



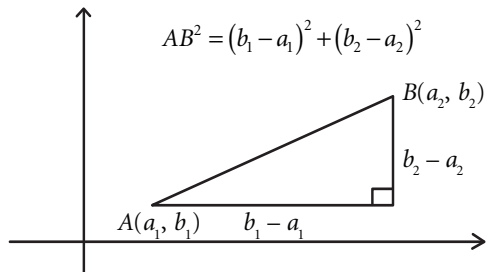
Figur 11

Lengdene CB og CQ blir lik 1 når jeg som deg velger jordradien som enhet. Jeg finner lengden av BQ ved først å finne koordinatene til B og Q i et passende koordinatsystem. Du husker kanskje at når koordinatene til to punkter er kjent, $A(a_1, a_2, a_3)$ og $B(b_1, b_2, b_3)$, så er lengden AB gitt ved:

$$(8) \quad AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

– Vel ...

– Det dreier seg bare om bruk av Pytagoras setning. Her er en illustrasjon i 2 dimensjoner:



Figur 12

Etter litt strev valgte jeg å legge inn x -aksen langs linja CD , y -aksen normalt på denne lengre bort i ekvatorplanet, og z -aksen langs CN , dvs. langs jordaksen. B sine koordinater er da ganske greie (husk at jordradien, f. eks. CB , er lik 1):

$$B(\cos\delta, 0, \sin\delta)$$

Kall koordinatene til Q for (x, y, z) , og studer figur 11 ovenfor. Jeg har markert P og Q sine fotpunkter i xy -planet og kalt dem P_1 og P_2 . Vi ser da at $z = \sin\beta$. Videre blir $CQ_1 = \cos\beta$, og figuren gir også:

$$\cos\gamma = \frac{x}{\cos\beta}, \text{ dvs. } x = \cos\beta\cos\gamma$$

og

$$\cos\gamma = \frac{y}{\cos\beta}, \text{ dvs. } y = \cos\beta\sin\gamma$$

Dermed har vi også Q sine koordinater:

$$Q(\cos\beta\cos\gamma, \cos\beta\sin\gamma, \sin\beta)$$

For avstanden BQ har vi da i følge (8):

$$\begin{aligned} BQ^2 &= (\cos\beta\cos\gamma - \cos\delta)^2 + (\cos\beta\sin\gamma)^2 \\ &\quad + (\sin\beta - \sin\delta)^2 \\ &= \cos^2\beta\cos^2\gamma - 2\cos\beta\cos\gamma\cos\delta + \cos^2\delta \\ &\quad + \cos^2\beta\sin^2\gamma + \sin^2\beta - 2\sin\beta\sin\delta + \sin^2\delta \\ &= \cos^2\beta(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) + \sin^2\beta - \\ &\quad - 2\cos\beta\cos\gamma\cos\delta - 2\sin\beta\sin\delta + 1 \\ &= 1 - 2\cos\beta\cos\gamma\cos\delta - 2\sin\beta\sin\delta + 1 \\ &= 2 - 2\cos\delta\cos\beta\cos\gamma - \sin\delta\sin\beta \end{aligned}$$

Endelig er jeg klar for å anvende cosinussetningen på trekant BCQ :

$$\begin{aligned} BQ^2 &= CB^2 + CQ^2 - 2CB \cdot CQ \cdot \cos k \\ &= 1 + 1 - 2\cos k \end{aligned}$$

som gir $\cos k = 1 - 1/2 \cdot BQ^2$. Her setter jeg inn mitt uttrykk for BQ^2 ovenfor, og får:

$$\begin{aligned} \cos k &= 1 - 1/2 \cdot (2 - 2\cos\delta\cos\beta\cos\gamma - 2\sin\delta\sin\beta) \\ &= \cos\delta\cos\beta\cos\gamma + \sin\delta\sin\beta \end{aligned}$$

Og nå, min venn, er det generelle solhøydeproblemet vårt løst! Du husker at solhøyden over stedet Q , nemlig vinkel h , danner 90° sammen med vinkel k . Da er jo $\sin h = \cos k$, og vi har:

$$(9) \quad h = \sin^{-1}(\cos\delta\cos\beta\cos\gamma + \sin\delta\sin\beta)$$

– Det var sannelig ikke verst. Og nå kan vi jo få bort hjelpevinkelen δ ved min formel (6).

Jeg fant der at $\sin\delta = \sin u \cdot \cos\alpha$ og da er jo $\cos\delta = \sqrt{1 - \sin^2 u \sin^2 \alpha}$. ($\cos\delta$ er faktisk alltid positiv fordi δ varierer mellom $-23,5^\circ$ og $+23,5^\circ$.) Innsatt i (9) gir det oss:

$$(10) \quad h = \sin^{-1}(\sqrt{1 - \sin^2 u \cos^2 \alpha} \cdot \cos\beta\cos\gamma + \sin u \cos\alpha \sin\beta)$$

– Endelig! Der er den, *solhøydefunksjonen*, som gir solhøyden for et sted med breddegradstall β , på årstidspunktet (α = årstidsvinkelen) α , regnet etter sommarsolhverv ca. 21. juni, og på tidspunktet (γ = tidsvinkelen) γ i døgnet, regnet etter midt på dagen, kl. 12.00. Og så husker vi at vinkel u står for den konstante helningsvinkelen mellom ekvatorplanet og ekliptikkplanet, $u \approx 23,5^\circ$.

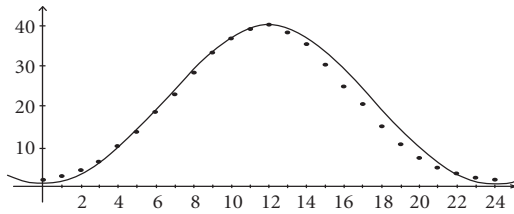
– Ja. Litt omstendelig ble den kanskje. Men nå må vi teste den på postkortet fra Loppa! Døgnet for fotografiene var 21./22. juli. Det vil si at vår årstidsvinkel blir $\alpha \approx 30,5/365 \cdot 360^\circ \approx 30,1$. Akkurat hvor langt nord på Loppa bildene er tatt, står ikke på kortet. Men jeg har tittet litt i et atlas og i denne *almanakken*, – en interessant liten bok, forøvrig! Midt på Loppa har tilnærmet samme breddegrad som Vardø, i almanakken oppgitt til $\beta = 70,38^\circ$. Da tar vi lommeregneren og forenkler (10) ..., og vi får denne funksjonen som modell for solhøyden over Loppa det aktuelle døgnet:

$$h = \sin^{-1}(0,315\cos\gamma + 0,325)$$

eller

$$h = \sin^{-1}[0,315 \cdot \cos(15x - 180) + 0,325]$$

Til høyre er γ erstattet med $15x - 180$, for å få den fri variable x målt i døgnets timer med 0-tidspunkt ved midnatt. Grafen skaffer vi oss ved hjelp av et dataverktøy. La oss også tegne inn solhøyden slik de ble målt på postkortet, nå skalert slik at maksimalsolhøyden kl. 12 på kortet og på vår modell er gjort like høye:



Figur 13

– Vel, vel, – ikke så verst. At vår kurve passer bedre med punktene på den ene halvdel enn på den andre, kan vel skyldes at fotografen har tatt bildene ved hver hele time etter sitt vanlige ur. Norsk offisiell sommertid stemmer neppe helt med «sann» soltid for Loppa. (Vi ser jo f. eks. at solhøyden kl. 11.00 og kl. 13.00 var litt forskjellige.) Og de klart løftede solhøyden rundt midnatt tror jeg skyldes vanlige effekter av lysbrytning.

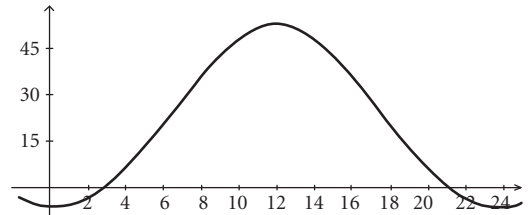
Dessuten har vi jo stilltiende antatt at «årstidsvinkelen» α kan regnes som konstant i løpet av ett enkelt døgn. Og videre er det vel heller ikke helt riktig at jordas bevegelse rundt sola er slik at α øker like mye pr. døgn året rundt. (Sier ikke *Keplers lover* noe om dette, mon tro?)

– Jo jo. Men jeg har lyst til å se hvordan solgangskurven tar seg ut midtsommers for byene Oslo og Bergen, som begge ligger på ca. 60° nordlig bredde. Her blir det som kjent ikke midnattsol, men er det mye som mangler? Vi setter $\alpha = 0^\circ$ (midtsommers) og $\beta = 60^\circ$ i vår formel (10), og benytter stadig $15x - 180$ istedet for γ , og får:

$$h = \sin^{-1}[0,458 \cdot \cos(15x - 180) + 0,345]$$

som gir grafen i figur 14.

– Legg merke til at vi her faktisk også kan gjøre grafiske avlesninger av tidspunktene for *soloppgang* og *solnedgang*, og dermed også finne *dagens lengde* dette døgnet for steder på 60° nord. Vi finner nokså nær klokkeslettene 2.40 og 21.20 for «sol opp» og



Figur 14

«sol ned» (vel å merke etter en tenkt lokal klokke som følger «sann» soltid). Dagens lengde blir da differansen, 18 timer og 40 minutter, og nattens lengde 5 timer og 20 minutter.

– Dette kan vi faktisk kontrollere med en fasit, nemlig *almanakken*. Her finner vi for Oslo for 21. juni: «sol opp» kl. 3.54 og «sol ned» kl. 22.44. Dette gir differansen 18 timer og 50 minutter, altså ganske nært vårt resultat. At tidspunktene for soloppgang og –nedgang er noe forskjøvet i forhold til våre, skyldes selvsagt igjen at norsk offisiell klokke ikke stemmer helt med den lokale «sanne» soltida.

– Vår formel for h kan jo brukes til å finne tidspunktene for soloppgang og solnedgang for ethvert sted til enhver årstid! – Det er bare å sette $h = 0^\circ$ i (10) og så løse ligningen for γ . Bruker vi istedet (9) ser vi ganske lett at vi får følgende pene betingelse for soloppgang og –nedgang:

$$(11) \quad h = 0^\circ \text{ er ekvivalent med } \cos \gamma = -\frac{\sin \delta \sin \beta}{\cos \delta \cos \beta} = -\tan \delta \tan \beta$$

– Litt morsomt å sette inn $\delta = 0^\circ$ her, – det vil svare til vår- eller høstjvendøgn, som figur 9 viser. Da blir altså $\cos \gamma = 0$, dvs. $\gamma = 90^\circ$ som er klokken 6.00, eller $\gamma = 270^\circ$ som er kl. 18.00. Med andre ord varer dagens lengde, dvs. den tiden sola er oppe, fra kl. 6.00 til kl. 18.00 for alle steder på jorda (strengt tatt med unntak av polene) ved disse to årstidspunktene. Navnet *jvendøgn* er altså ganske godt.

– Har du forøvrig sett siste nr. av *Tangenten* (nr. 3/99)? Her utvikler *Frode Rønning* i en artikkel en matematisk modell for å finne dagens lengde med et noe annet geometrisk utgangspunkt enn vårt, men der den sentrale formelen han kommer fram til er den samme som vår formel i (11) ovenfor.

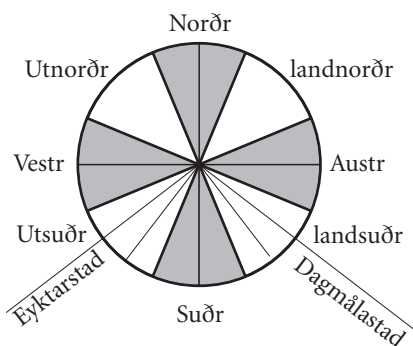
– Det var et artig sammentreff!

Hvor lå Vinland?

– Jeg er, som du vet, litt sagainteressert. Hør på denne spennende beskrivelsen av forholdene i *Grønlandssagaens* Vinland:

Det var mer jamndøgr der enn på Grønland eller Island. Solen hadde der eyktarstad og dagmålastad på skamdagen.

Skamdagen betyr årets korteste dag (norrønt «skamr» = «kort»). Den islandske lovbok *Grågås* nevner at «Det er eykt når *utsudrs ætt* er delt i tre deler, og solen har gått to deler og det er én del igjen». En mener at *eyktarstad* og *dagmålastad* anga de steder solen sto (over) ved tidspunktene for nonsmåltid (ettermiddagsmat) og dugurd (formiddagsmat). En tolkning (– det finnes to hovedtolkninger) av «*utsudrs ætt*» er knyttet til nedestående gamle inndeling av horisonten i 8 retningssområder (jf også T. Urke i *Tangenten* nr. 4/99 side 13):



Figur 15

Hele sirkelen representerer jo på en måte også et helt døgn, eller 24 timer som vi vil si. Vi ser at vinkelen for *eyktarstad* nå blir $1/2 \cdot 45^\circ + 2/3 \cdot 45^\circ = 52,5^\circ$. (Dette skulle da svare til tidspunktet kl. 12.00 + $52,2/90$ av 6 timer, dvs. kl. 15.30 om ettermiddagen.) La oss nå tolke situasjonen omkring Vinlandsobservasjonen slik at (sentret av) solen akkurat gikk ned, dvs. $h = 0^\circ$, ved vintersolverv, dvs. $\delta = -23,5^\circ$, og at vår vinkel γ er *eyktarstad*vinkelen $52,5^\circ$. Vi skulle da kunne finne stedets breddegradstall, β , ved hjelp av vår formel (11) foran:

$$\tan \beta = -\frac{\cos \gamma}{\tan \delta} = -\frac{\cos 52,5^\circ}{\tan(-23,5^\circ)} \approx 1,400$$

og dermed

$$\beta = \tan^{-1} 1,400 \approx 54,5^\circ$$

Lengre nord enn dette vil, i følge vår modell, sola ha gått ned før *eyktarstad* midtvinters (hvis en da ikke befinner seg på en høyde eller fjelltopp).

– La oss nå kikke i et atlas! ... $54,5$ grader er neimen ikke imponerende langt mot syd, vi havner jo langt oppe på Labradorkysten. Har det ikke vært sagt at Vinland lå på Newfoundland, eller tilmed nede i New York – Boston området? Hm ...

– Du! Jeg tror vi har gjort noe skummelt i denne anvendelsen på Vinlandproblemet. Når vi setter *eyktarstad*vinkelen $52,5^\circ$ lik vår tidsvariabelvinkel γ , så har vi brukt den som et uproblematisk *klokkeslett*, mens den jo angir en posisjon for sola langs horisonten!

– Men blir ikke det det samme, da?

Noen ideer til oppgaver/oppfølginger

1. Bruk formel (10) til å lage solens gang-kurver for – Nordkapp, – Longyearbyen, – ditt hjemsted, på ulike årstider.
2. Finn en formel for maksimalsolhøyden en vilkårlig dag i året for ditt hjemsted.
3. Se på formelen for γ i (11). – Gir den alltid løsning? – Hvordan tolke dette?
4. Finn tidspunktene for soloppgang og -nedgang, og dagens lengde, ved ekvator.
5. Søk kilder og finn ut hvor mye lysbrytningen “løfter” solen i nærheten av horisonten. Studer også effekten av å definere solnedgang som at solens *øvre rand*, og ikke dens sentrum, forsvinner.
6. Studer fenomenet *tusmørke* (se f.eks. et leksikon), og undersøk eksempler på dets utbredelse ved hjelp av formel (10).
7. Studer begrepet *kimingdalingen*, og forsøk å finne ut hvor mye den utgjør i ulike høyder over havet.
8. Kjenner du uttrykk som *nonsfjell* eller *middagstind*, og vet du eksempler på slike?

Denne artikkelen blir fulgt opp i et senere nummer av *Tangenten*.