Gunnar Gjone: matematikk på frimerker

Hva er tall?

Richard Dedekind (6. oktober 1831 – 12. februar 1916)

Allerede hellenerne visste at det var forhold som ikke kunne uttrykkes som brøker. For eksempel forholdet mellom en side og diagonalen i et kvadrat. Se artikkelen om Pytagoras i Tangenten 3/1999. Beviset for dette (at kvadratroten av 2 er irrasjonal) ble trukket fram i boka *A Mathematicians Apology* av Godefrey Hardy som et kunstverk i matematikk.

Utviklingen av matematisk analyse rundt år 1800, spesielt med Cauchy og utviklingen av grensebegrepet, hadde ført med seg behovet for å «rydde opp» i tallbegrepet. På 1800-tallet ble derfor en rekke tyske matematikere opptatt av tall og tallbegrepet generelt. I denne gruppen av matematikere finner vi blant annet Ernst E. Kummer (1810–1893), Johann P. G. Lejeune Dirichlet (1805–1859), Leopold Kronecker (1823–1891), Georg Cantor(1845–1918), Karl T. W. Weierstrass (1815–1897) og altså Richard Dedekind. Sammen la de grunnlaget for det tallbegrepet som vi har i dag.

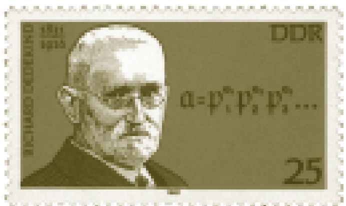
Det passer her å trekke fram et av de mest kjente sitatene fra denne perioden, som sier litt om ulike syn på hva tall er: Gud skapte de hele tallene, alt annet er menneskeverk. (Kronecker)

De tallene som vi bruker i dagens matematikk, kan vi framstille skjematisk som i figuren.

I tillegg kommer utvidelsen av tallsystemet til også å omfatte såkalte «uendelige» tall. Mengden av de rasjonale tallene kan vi si var kjent, men en kjente som nevnt en rekke eksempler på tall som ikke var rasjonale. Vi må også trekke fram at det var matematikere på denne tida som heller ikke anerkjente (våre) negative tall som tall. Før vi går nærmere inn på Dedekinds bidrag, vil vi ta for oss noe om personen Richard Dedekind.

- Komplekse tall
  - Reelle
    - Algebraiske
      - Rasjonale
        - Hele tall
        - Brøker
      - Irrasjonale
    - Transcendentale
  - Imaginære

Richard Dedkind tilhørte en nordtysk akademikerfamilie. Han ble født som den yngste av fire søsken i Braunschweig. En av søstrene hans – Julie – giftet seg aldri, noe som heller ikke Richard Dedekind gjorde. Julie tok vare på Richards hushold fram til hun døde i 1914.



Fra han var 7 til 18 år gikk han på skoler i Braunschweig. I 1850 begynte han å studere matematikk i Göttingen. Göttingen var et av sentrene for matematikk i Europa på denne tida. Carl Friedrich Gauss var fortsatt aktiv, og i 1851 kom Bernhard Riemann (1826–1866) til Göttingen.

Etter å ha fullført sin utdanning ble han såkalt privatdosent (foreleser) i Göttingen i 1854. De følgende fire årene som privatdosent fikk stor betydning for hans videre arbeid som matematiker. Gauss døde i 1855 og ble etterfulgt av Dirichlet. Det utviklet seg et nært vennskap mellom dem og gjennom Dirichlet fikk Dedekind innføring i de sentrale matematiske ideene i tida.

I 1858 ble Dedekind, etter anbefaling av Dirichlet, professor ved den polytekniske høgskolen i Zürich. Her fikk han ry som en meget god foreleser, han var ellers privat tilbakeholden og beskjeden. I 1862 fikk han stilling som professor ved den polytekniske høgskolen i hjembyen Brauschweig. Her ble han til han trakk seg tilbake i 1894. Dedekind fikk en rekke utmerkelser og var for eksempel æresdoktor ved Universitetet i Oslo. Sine siste leveår levde han stille og tilbaketrukket i Brauschweig.

La oss nå gå tilbake til noen av Dedekinds arbeider. Ved den polytekniske høgskolen i Zürich underviste Dedekind i matematisk analyse og i arbeidet med dette området var det tydelig for han at de reelle (eller rettere de irrasjonale) tallene manglet en formell definisjon. Dette er jo et godt spørsmål å filosofere over – hvordan kan en egentlig definere et irrasjonalt tall? Dedekind tok utgangspunkt i mengden Q av de rasjonale tallene. Grunnbegrepet i teorien hans er *snitt* (i ettertid kalt Dedekind-snitt):

En oppdeling av Q i to disjunkte mengder A_1 og A_2 kalles et snitt, når vi for vilkårlige $a \in A$ og $a \in A$ alltid har $a < a$. Snittet skrives $(A \mid A)$

I mengden av snitt kan en definere en større-enn ordning, såvel som addisjon og multiplikasjon. Et snitt bestemmer et punkt på talllinja, og på denne måten kan en innføre reelle tall. For eksempel er $\sqrt{2}$ følgende snitt: $(A \mid A)$ der

$$A = \{r \quad \mathbf{Q} : r < 2\} \text{ og } A = \{r \quad \mathbf{Q} : r > 2\}$$

Teorien som Dedekind utviklet var ikke helt fullstendig, men ett av flere forslag til hvordan en slik teori kunne utvikles. To av Dedekinds sentrale artikler finnes i engelsk oversettelse på Dover forlag, Dedekind (1963).

I figuren omtales algebraiske og transcendentale (reelle) tall. Et algebraisk tall er et tall som framkommer som rot i en likning med rasjonale koeffisienter, for eksempel er $\sqrt{2}$ et algebraisk tall, mens π ikke er algebraisk, men transcendentalt. Dedekind var også opptatt av tallmengder og mengdelære og sto i nær kontakt med Georg Cantor. Det er interessant at Cantor i 1873 skrev brev til Dedekind der han spurte om de reelle tallene (kontinuumet) kunne avbildes en-entydig på mengden av de naturlig tall, det vil si om de reelle tallene var *tellbare*. Dedekind svarte at han ikke visste svaret på spørsmålet, men at han kunne bevise at mengden av alle reelle algebraiske tall var tellbar. (Vi kan her bemerke at Cantor selv fant svar på spørsmålet, og at hans bevis har blitt stående som et av de sentrale i teorien om reelle tall.)

Dedekind var sentral i en viktig periode i matematikkens utvikling. Dedekinds forsking førte fram til det som vi i dag kaller *aritmetiseringen av analysen* – utleding av teoremer i analyse, først ut fra de grunnleggende egenskapene til heltall og så videre fra mengdelæren.

Ellers er Dedekinds bidrag først og fremst knyttet til definisjoner av tallstrukturer – tallkropper og idealteori. For historiske innføringer i disse temaene henvises de interesserte først og fremst til boka til Victor Katz.

Oppgaver

1. Vis at de rasjonale tallene er tellbare, dvs. kan avbildes en-entydig på de naturlige tallene.
2. Vis at de algebraiske tallene er tellbare.
3. Hvordan kan en definere addisjon av Dedekind-snitt? Hvilke egenskaper kan du utlede om addisjon, er den for eksempel kommutativ?

Litteratur

Bell, E. T. (1965) Men of Mathematics. London: Penguin.

Dedekind, R. (1963) Essays on the Theory of Numbers.New York: Dover Publ.

Katz, V. J. (1993) A History of Mathematics. New York: HarperCollins College Publ.

Muir, J. (1996) Of Men and Numbers. New York: Dover Publ.

Wussing, H. & Arnold, W. (1989) Biographien bedeutender Mathematiker. Berlin: Volk und Wissen.