

Arne Kåre Toppol

Monte Carlo Simulering

Terningar ikkje berre til Ludo

Både i GR-97 og Reform 94 vert det lagt vekt på at ein i matematikk skal drive utforsking og eksperimentering. Der vert det også peika på kor viktig det er å sjå samanhangen mellom matematikken og den røyndomen den gir seg ut for å skildre, på dei område der den gir seg ut for å skildre nokon røyndom då.

Eit emne der det både er sær viktig med eksperimentering, og som er velegna til det, er sannsynsrekning. Dette emnet har kome sterkare inn i fagplanane etter begge dei nemnde reformene. Utan ei kopling til røyndomen gjennom eksperimentering trur eg mykje av sannsynsrekninga vert hengande i lause lufta. Å rekne ut sannsyn på papiret, og få fasitsvar, kan vere vel og bra. Det har likevel så forsvinnande liten verdi så lenge det ikkje kan knytast til røyndomen gjennom praktisk erfaring. Kva tyder dei i praksis dei sannsyna ein reknar ut på papiret? Utsegn av typen *"Ja, eg forstår utrekninga som gir sannsynet 2/3, men det er no teori då, eg trur at i praksis vert det 50-50"*, er ganske vanlege, og viser at forståinga av kva eit utrekna sannsyn fortel ikkje stikk særleg djupt.

Heldigvis er det korkje vanskeleg eller dyrt å utføre eksperiment på dette området. Nokre terningar, teiknestiftar, fyrstikker og gode gamle Monte Carlo, og ein er langt komen. Vi skal her sjå på nokre døme på bruk av forholdsvis enkelt utstyr i ein slik samanheng.

Men fyrst:

Monte Carlo, kva er det?

Dersom vi i løysinga av eit problem nyttar ein metode eller teknikk der tilfeldige tal, eller tilfeldige prosessar, er med å avgjere resultatet, kallar vi dette ein Monte Carlo (MC) metode (teknikk). Eit døme på dette finn vi heime ved stovebordet ein søndag ettermiddag når familien skal avgjere kven som er best i Ludo. Litt taktikk er med å avgjer, men det meste er nok styrt av dei tilfeldige terningane.

Som i kasinoet i Monte Carlo er det altså tilfeldige prosessar som gir oss resultatata vi jaktar på.

Monte Carlo (MC) metodar har vore kjende lenge, men det var med utviklinga av raske datamaskiner at bruken av MC skaut fart. Særleg er det innafor enkelte retningar i fysikk og matematikk (numerisk integrering) at metoden vert nytta i forskning, men vi finn den brukt også i andre fag. Sin styrke viser MC særleg i møte med problemstillingar som er for kompliserte til å løyse med tradisjonelle (klassiske)

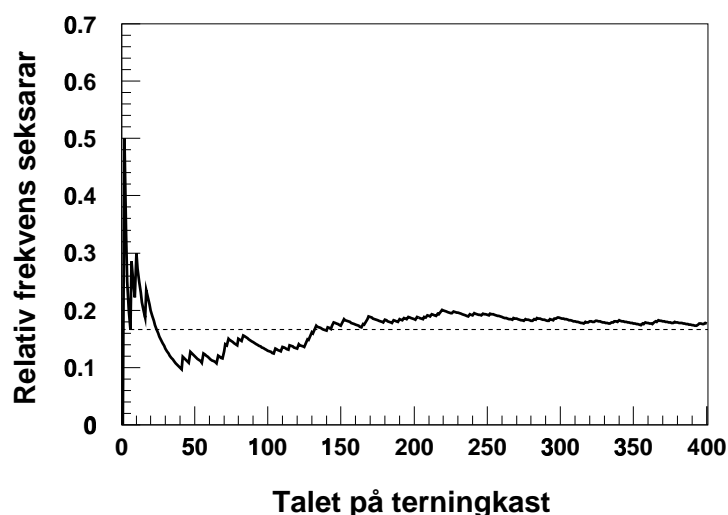
metodar.

Samstundes som MC kan nyttast til å gi enkle illustrasjonar av kompliserte fenomen, jamfør terning og radioaktivitet i eit seinare avsnitt, er det altså ein mykje brukt metode i seriøs forskning. Ein metode som det er lagt ned mykje arbeid i dei siste tiår for å vidareutvikle.

Kvar blir $1/6$ av når vi kastar terning?

Når vi kastar ein vanleg speleterning på eit plant underlag forstår vi intuitivt at alle sidene på terningen vil ha like stort sannsyn for å vende opp. I alle høve dersom terningen er rettferdig. Vi seier då at sannsynet for å få seksar er $1/6$ sidan terningen har 6 sider, og skriv dette $P(\text{seksar})=1/6$. Etter å ha fastslått dette kastar vi terningen, som viser tre auge. Kvar vart så $1/6$ av? Er det mogleg gjennom praktisk terningkasting å finne denne sjettedelen, eller er den berre ein teoretisk skrivebordsstorleik?

Som eg allereie har vore inne på er det i undervisning i sannsynsrekning viktig å få knytte dei teoretisk utrekna sannsyna til røyndomen på ein eller annan måte. For det er vel røyndomen vi prøver seie noko om? Særleg er dette viktig i arbeidet med dei grunnleggjande omgrepa, som er det ein mest arbeider med i grunnskule og vidaregåande skule. Det kanskje litt naive spørsmålet om korleis $P(\text{seksar})=1/6$ viser seg i praksis bør difor både spørjast, og svarast på. Svaret finn vi i Store tals lov. Den seier at i det lange løp, etter å ha kasta terningen mange gongar, vil relativ frekvens seksar nærme seg til $P(\text{seksar})$. Den einaste måten å verkeleg finne denne sjettedelen er altså å kaste uhorveleg mange kast med ein terning. Så lat oss gjere det då, og vone at mengda seksarar nærmar seg til $1/6$ av totalt tal kast.



Figuren viser resultatet av kastinga vår. Du som lesar fekk ikkje vere med å kaste, men prøv for all del sjølv også. Talet på kast langs x -aksen og relativ frekvens seksarar langs y -aksen. Den horisontale stipla lina svarar til $1/6$. Ser her tydeleg korleis relativ frekvens varierer etter kvart som kastinga skrid fram, men at den heile tida ser ut til å nærme seg det magiske $1/6$.

Dette forsøket er, etter definisjonen over, ei MC-simulering. I tillegg er det enkelt å gjennomføre og framfor alt illustrerer det ein del viktige forhold i sannsynsrekninga.

Koplinga mellom teoretisk utrekna sannsyn og det vi kan erfare i praksis er her direkte. Vi har eit kjent sannsyn som vi kan samanlikne våre eksperimentelle resultat mot. Resultatet viser også at vi kan vente dels store svingingar om $1/6$ men at desse svingingane vert mindre etter kvart som talet på kast aukar. Ein ny kasteserie vil gi ei anna utvikling.

Når eit slikt forsøk skal gjennomførast i eit klasserom er det viktig at elevane får følgje med i korleis det utviklar seg etter kvart som kastinga skrid fram. Dette kan enkelt gjerast ved å ha koordinatsystemet teikna ferdig på ein transparent, med y -verdiar i området $0-1$ og x -verdiar frå 0 til så mange kast ein planlegg. Ha også teikna på ei horisontal line som svarar til $1/6$. Etter kvart som elevane kastar sine terningar tel ein opp seksarar så langt, reknar ut relativ frekvens og teiknar inn på transparenten. Dette gir eit godt utgangspunkt til undervegs å stoppe opp og diskutere utviklinga etter kvart som resultatet nærmar seg eller fjernar seg frå $1/6$. Kva om resultatet etter 160 kast viser nøyaktig $1/6$? Då er det freistande å stoppe. Kan vi det når vi egentleg har planlagt 250 kast?

Spørsmåla vidare kan vere mange. Kor store variasjonar kan vi vente oss sjølv om terningen er rettferdig? Kor stort avvik må til før vi kan konkludere med at terningen ikkje er rettferdig? Med desse spørsmåla er vi over på estimering og hypoteseprøving. Dette viser at vegen frå enkel sannsynsrekning på grunnskulenivå, til langt meir avanserte emne er kort. Vi skal her kort svare på det fyrste av spørsmåla, og viser elles til Knut Ole Lysø og Per Chr. Hagen sine gode innføringar i emnet [Lysø, Hagen] for grundigare omtale.

Talet på seksarar, X , etter n terningkast vil vere binomisk fordelt med n enkeltforsøk og suksessansyn $1/6$, X er $\text{bin}(n, 1/6)$, dersom terningen er rettferdig. Variansen til X vert då $V(X) = n \frac{1}{6} \frac{5}{6}$. For estimert sannsyn $\hat{P} = X/n$ får vi då $V(\hat{P}) = \frac{1}{n^2} V(X) = \frac{1}{n} \frac{1}{6} \frac{5}{6}$. For stor n , hundre held lenge, vil X og dermed også \hat{P} vere tilnærma normalfordelt. Eit 95% konfidensintervall (prediksjonsintervall) for \hat{P} vert då gitt ved $1/6 \pm 1.96 \sqrt{5/(n \cdot 36)}$, for detaljar visest til referansane gitt over. I 95% av forsøka våre vil vi altså med $n = 200$ kast hamne innafør eit slingringsmonn på $1.96 \sqrt{5/(200 \cdot 36)} \approx 0.05$ til begge sider for $1/6$. Sagt på ein annan måte, dersom vi startar ein slik kasteserie vil vi ha eit sannsyn på 0.95 for at relativ frekvens seksarar etter akkurat 200 kast ligg innafør intervallet $[0.12, 0.22]$. Variasjonane kan altså vere ganske store sjølv etter 200–300 kast, og dette er det viktig å erfare i praksis.

Samling i sentrum

Tenk deg følgjande "hesteveddelaup". Elleve spelebrikker, hestar, nummererte 2–12 står klar til start. Kast to terningar og rekn ut summen. Den hesten som har nummer lik denne summen flyttar ein plass fram. Viser terningane 3 og 5 får altså hest nr. 8 flytte ein posisjon fram. Frå start til mål er det 30 posisjonar.

Dersom du vart tvunga til å satse sparepengane dine på ein av hestane, kva for ein ville du velge ut? Er det nokon som er gunstig med omsyn på gevinst, eller er det hipp som happ? Tenk deg om før du går vidare.

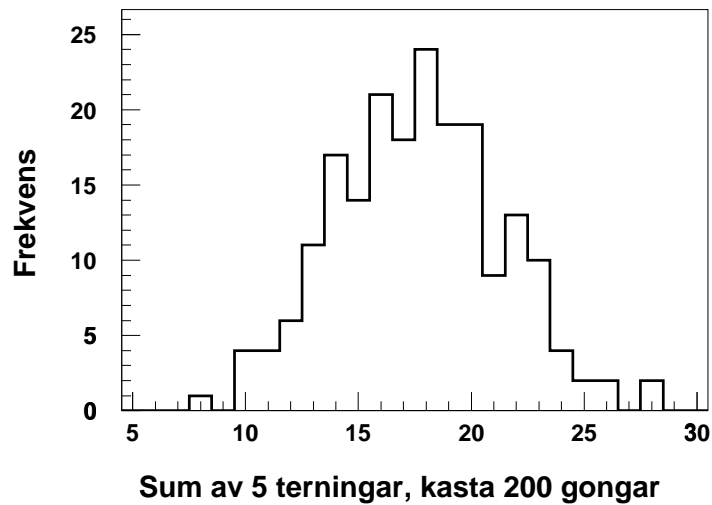
Ved kast med to terningar er det i alt 36 ulike kombinasjonar som gir opphav til dei 11 ulike summene. Kvar enkelt av desse kombinasjonane er like sannsynlege. Den summen som framkjem frå flest kombinasjonar har dermed størst sannsyn for å inntreffe. Skjematisk er dei ulike kombinasjonane vist i tabellen til høgre.

Hest 7 kjem altså best ut med 6 kombinasjonar, hestane 6 og 8 har 5 kombinasjonar kvar og slik minkar det utover til hestane 2 og 12 som vert hengande håplaust etter med berre 1 kombinasjon kvar.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Kva om vi aukar til tre terningar? Eller kva med 5 terningar?

Med 5 terningar kan vi få sum i området 5–30. I alt er det $6^5 = 7776$ ulike terningkombinasjonar. Summen 5 får vi berre med ein av desse kombinasjonane, berre einarar. Sum 30 får vi med berre seksarar. Det seier seg sjølv at desse vert sjeldne. Verdiane i midten, dei rundt 17–18, kan vi derimot få på mange ulike måtar og dei vert dermed tilsvarande sannsynlege. Figuren under viser histogrammert sum etter 200 kast med 5 terningar.

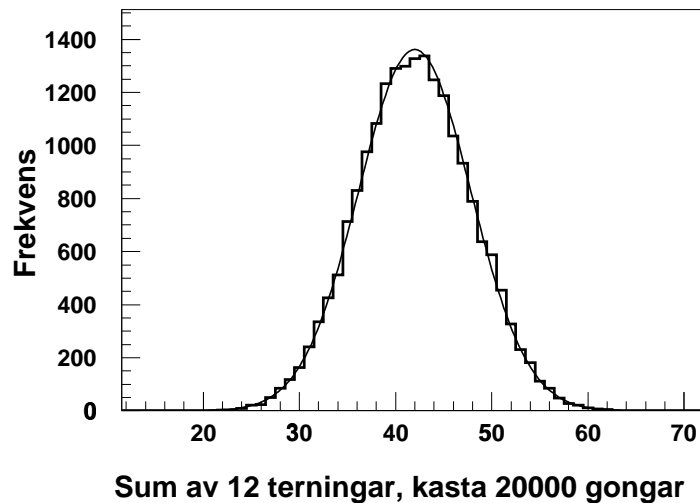


Vi har fått ei tydeleg samling om sentrum, slik som venta, med eit snev av "halar" mot høge og lave verdiar. Faktisk har vi fått noko som har klokkeform, omlag som ei normalfordeling (Gaussfordeling). Dette siste er i samsvar med det ein ventar frå sentralgrenseteoremet. Dette er kanskje det viktigaste teoremet i sannsynsteori, med langtrekkande teoretiske og praktiske implikasjonar. Det eksisterer mange formuleringar av dette teoremet, men til vårt bruk er følgjande forholdsvis upresise og ufullstendige formulering god nok:

Dersom vi har n uavhengige stokastiske (tilfeldige) variablar, vil summen av dei vere tilnærma normalfordelt (Gaussfordelt) når n er stor.

Desse n uavhengige variablane kan til dømes vere n terningar. I vårt tilfelle er $n = 5$ forholdsvis liten, men likevel er klokkeforma tydeleg.

Aukar vi så til 12 eller fleire terningar, og kastar nokre tusen gongar vil histogrammet for summen av auge vere så godt som identisk med ei normalfordeling. Dette bør du prøve ein regntung laurdagskveld. Du vil då få ein god illustrasjon av det viktige sentralgrenseteoremet. Figuren under viser resultatet med 12 terningar og 20 000 kast. Normalfordeling er teikna på for samanlikning, og vi ser at samsvaret med normalfordelinga er uomtvisteleg. Her bør kanskje vedgåast at ei datamaskin har hatt oppdraget med å "kaste" terningane. Den har det rette tolmodet til slikt.

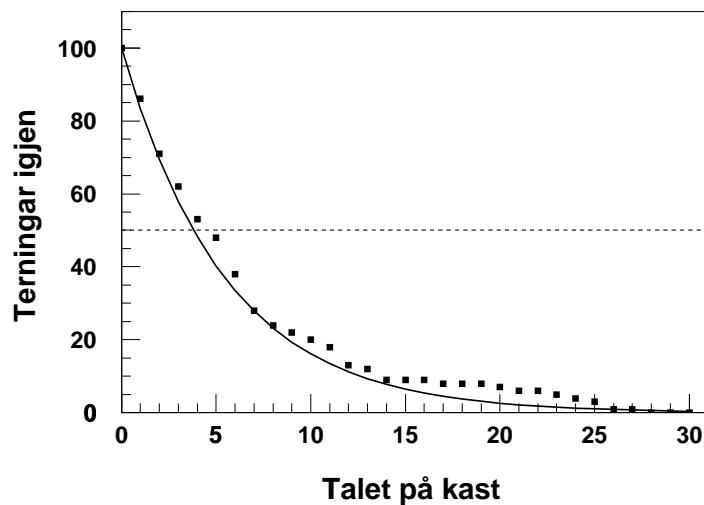


Mykje av det vi måler på i naturen viser seg å gi tilnærma normalfordelt resultat, anten det gjeld stengelhøgde til tulipanar eller vekta til songsvaner. Desse forholda er resultat av mange tilfeldige faktorar i arvestoff, næringstilførsel og andre livsvilkår. I samsvar med sentralgrenseteoremet vert då sluttresultatet normalfordelt så lenge ikkje nokre få av faktorane dominerer over resten. Med ein neve vanlege speleterningar er det altså mogleg å simulere "naturen" i dette, ei Monte Carlo simulering.

Også her kan det vere eit metodisk poeng å teikne på transparent og la histogrammet vekse fram etter kvart som terningane vert kasta.

Atom, er ikkje det farlig då?

Tenk deg at vi har 100 vanlege speleterningar som vi kastar samla på eit bord. Alle terningar som viser tre auge tek vi bort og legg til side, dette vil vere omlag $1/6$ av alle terningane. Dei omlag $5/6$ terningane som er att gjentek vi prosessen med. Dette held vi så på med til alle terningar har vist tre og er ute. Litt enkel rekning viser oss at talet på terningar vi ventar å site att med etter eit generelt tal n kast, er eksponentielt avtakande, $N(n) = 100 \cdot (5/6)^n$. Grunna statistiske fluktuasjonar vil ein verkeleg kasteserie avvike meir eller mindre frå dette. Ved rekning finn vi at etter omlag 3.8 "kast" vil talet på terningar vere halvert, vi seier at teoretisk halveringstid for terningane er 3.8. Halveringstida vil også vere den same om vi startar med eit anna tal terningar. Denne halveringstida kan vi finne eit estimat for ved å utføre kastinga og registrere kor mange kast vi treng før terningmengda er redusert til 50. Gjer vi dette fleire gongar får vi stundom halvering etter fire kast, stundom etter fem eller kanskje også andre verdier. Vi nyttar tilfeldige tal, terningauge, og dermed ein MC metode til å finne svaret på vårt spørsmål: Kor lang er halveringstida?



Figuren over viser resultatet av ein slik kasteserie med både teoretisk kurve og verkeleg resultat innteikna. Den horisontale stipla lina markerer 50 terningar, halvering. Ser at vi passerer dette nivået frå kast 4 til kast 5, som er i rimeleg samsvar med dei 3.8 vi fann ved rekning. Ein ny kasteserie vil gi ei anna utvikling, kanskje betre, kanskje dårlegare tilpassa den teoretiske kurva. Her også er det eit poeng ved sjølvsyn å få sjå kva variasjonar ein kan få, samstundes som kastinga i det store og heile følgjer den teoretiske kurva godt.

Den som har litt kunnskap i fysikk vil sjå at det som skjer med terningane over liknar svært på det som skjer med ei samling radioaktive atom. På same måte som kvar enkelt terning har sannsynet $1/6$ for å verte lagd til sides ved eit kast, vil kvart enkelt atom ha konstant sannsyn p pr. tidseining for å sende ut stråling og verte omdanna til ei anna type atom (sundfall). Terningkastinga er altså ei svært enkel, billig og ufarleg MC simulering av radioaktivitet, der mange av dei karakteristiske eigenskapane ved radioaktivitet vert illustrerte.

Vi får på ein liketil måte illustrert omgrepet halveringstid, ein viktig storleik i samband med radioaktive stoff. Halveringstida er uavhengig av mengda radioaktivt stoff (tal på terningar) vi startar med. Derimot varierer den frå stoff til stoff. Dette siste kan enkelt simulerast ved at ein for kvart kast legg til side alle terningar som viser tre eller fire. Då vil ein få den teoretiske kurva $100 \cdot (4/6)^n$ med ei teoretisk halveringstid på 1.7.

Simuleringa kan også koplast til radioaktiv datering etter ^{14}C metoden. Denne metoden bygger på at alt levande vev, av same type, inneheld like store mengder ^{14}C , ein radioaktiv isotop av grunnstoffet karbon. Etter at vevet dør vert ikkje dette nivået halde oppe, men ^{14}C atoma vert spalta til nitrogen etter same mønster som alle radioaktive stoff vert spalta. Eit mønster som samsvarar med våre terningar. Mengda

av ^{14}C minkar under normale tilhøve med omlag 11.4% pr. 1000 år. Kvart ^{14}C har altså eit sannsyn på 0.114 pr. 1000 år for å desintegrere. Dette gir ei halveringstid på omlag 5730 år. Ved å undersøkje kor mykje ^{14}C som er igjen i ein død trebit som er funnen i naturen kan ein gå inn på kurva og lese ut kor lenge det er sidan dette treet døydde. Ein får med andre ord ei aldersfastsetting.

Overført på vår terningkasting vert det som å seie at vi starta med 100 terningar og har no 5 att, kor mange kast har vi gjennomført? Dette kan vi finne ved å lese av på den teoretisk kurva i figuren for kastinga vår, og vi finn 5 terningar etter omlag 16–17 kast. Vi ser også at den eksperimentelle kurva vår avvik ein del frå den teoretiske, den når 5 terningar fyrst etter 24–25 kast. Dette gir uvisse i vår fastsetting av tal kast som er brukt. Grovt kan vi seie at det er brukt ein stad mellom 12 og 25 kast.

Denne uvisse vert størst når det har vore mange kast og få terningar er att. Sidan kurva i det området er forholdsvis ”flat” vil litt slingring i y -retning gi stor slingring i x -retning. På same måten gir ^{14}C metoden uvisse ved datering. Uvisse vert større di eldre gjenstanden er og for ting som er eldre enn nokre 10000 år reknar ein ikkje ^{14}C metoden brukt åleine som god nok.

Som eit tips for gjennomføring vil eg igjen foreslå å teikne på transparent etter kvart som elevane kastar. Ha ein transparent ferdig med tal på kast langs x -aksen (0–30), og tal terningar (0–100) langs y -aksen. Den teoretiske kurva $100 \cdot (5/6)^n$ bør vere teikna på slik at ein kan følgje med på kor ”god” kasteserien vert. Hundre ”radioaktive” terningar vert fordelte mellom elevane. Alle kastar så samstundes og markerer med t.d. å rekke opp armar (og bein om naudsynt) kor mange terningar som viser tre og vert lagde til side. Marker så på transparenten kor mange terningar som er att. Desse vert kasta ein gong til med same prosedyre. Hald fram til all ”radioaktivitet” er borte.

Stjernebilete på tilfeldig vis

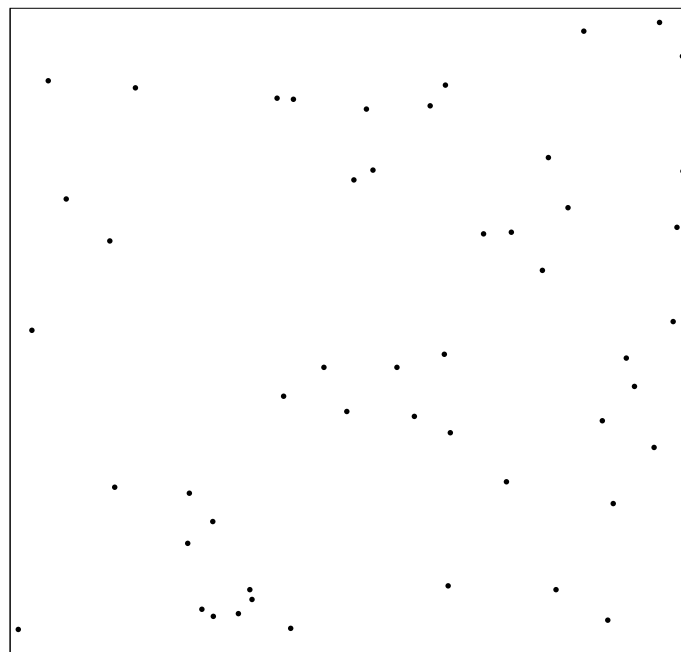
Ein kald og klar kveld, med augo vende mot himmelen, ser du dei tydeleg. Dei er ikkje til å ta feil av, stjernebileta. Store og Vesle bjørn, Orion, kreps og fisk, alle er dei på plass, desse som har inspirert fantasien til så mange før oss. Skulle nesten tru at nokon hadde planlagt dette flotte synet for oss og plassert stjernene i dei fine mønstra. Men slik er det truleg ikkje. Det vi ser er fullt i samsvar med ei heilt tilfeldig plassering av stjernene. Dei sju lyssterke stjernene som utgjer Karlsvogna t.d. har lite anna til felles enn at dei tilhøyrer same galakse. I avstand til jorda skil dei seg med titals lysår og gravitasjonskreftene dei påverkar kvarandre med er minimale. Det er m.a.o. heilt tilfeldig at dei står slik plasserte at vår fantasi ser ei vogn med drag. På same måte som alle dei andre bileta også er resultat av tilfeldig plassering og menneskeleg fantasi.

Stjernehimmelen er i det heile eit godt døme på at det i ei mengde punkt plasserte tilfeldig utover er svært lite sannsynleg at det ikkje oppstår grupperingar, som ofte

ikkje ser tilfeldige ut, men som like fullt er det. Dette er noko av årsaka til at det er så vanskeleg å planmessig lage mønster av prikkar som skal sjå tilfeldige ut. Vi har som oftast ein tendens til å ville fordele prikkane for jamt utover. Med verkeleg tilfeldig plassering vil det så godt som alltid oppstå punktsamlingar eller ”stjernebilette”. Sannsynet for ei fullstendig homogen fordeling av eit endeleg tal punkt er forsvinnande lite.

Dette kan enkelt simulerast med nokre riskorn og ein overheadprosjektor. For å unngå for mykje ris på golvet er det lurast å lage ei øskje med 20–30 cm høge veggar og med botn av overheadtransparent. Denne kan enkelt lagast ved å skjere botnen av ei kopipapirkasse og tape fast transparenten som botn. Set kassa på overheaden og slepp ein liten neve riskorn oppi, prøv deg fram med 50–100 korn. Slepp frå såpass høgd at dei spreier seg tilfeldig utover. Mønsteret som kjem på skjermen vert då ”stjernehimmlen”, og det vil vere sjeldan at fantasien ikkje ser tydelege stjernebilette.

Figuren under viser resultatet med 50 riskorn tilfeldig spreidde utover. Med litt fantasi er det ikkje vanskeleg å finne mønster. Ser du ikkje det spreke rådyret kanskje?



Tilfeldig stjernehimml

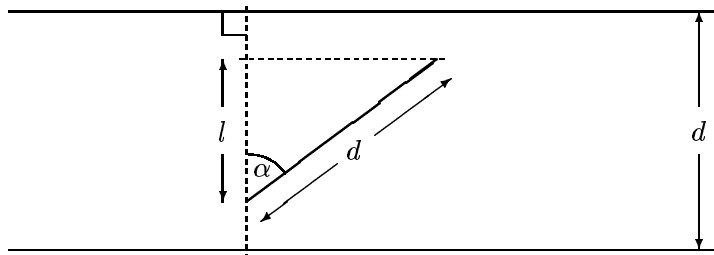
Det tilfeldige talet π

Midt på 1700 talet sat ein ung franskmann, Buffon, og kasta ei tynn nål på golvet. (Det foregjeikk neppe akkurat slik, men det rører ikkje ved kjerna i saka.) Der hadde

han teikna opp eit mønster av parallelle liner med innbyrdes avstand d . Nåla han kasta hadde same lengde som avstanden mellom desse linene, altså d . Kvar gong nåla kryssa ei line talde han eit treff, elles var det bom. Etter at han hadde kasta nåla eit stort tal n gongar, og hadde registrert X treff, rekna han ut forholdet $2n/X$ og påstod at dette gav han eit estimat, ein tilnærma verdi, for π . Akkurat som om det skulle vere noko tilfeldig med gode gamle erverdige π .

Dette forsøket publiserte han i 1777. Det har seinare fått namnet Buffon's nåleproblem, og er ein av dei tidlegast kjende MC teknikkar omtala i litteraturen.

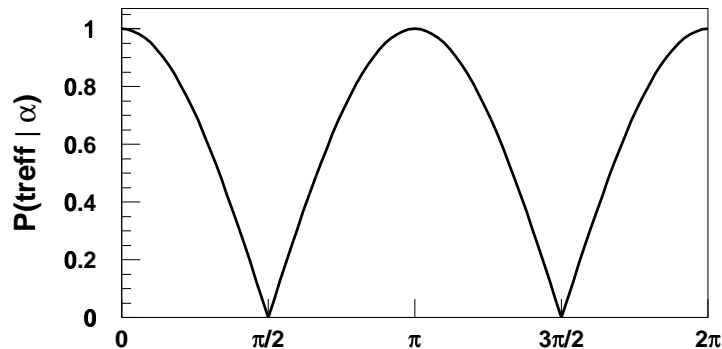
Etter Reform 94 er dette forsøket teke inn som døme i minst eit av læreverka for vidaregåande skule. I dette verket vert det gjort ganske mykje ut av forsøket utan at det etter mitt syn får ei forsvarleg handsaming. Koplinga til π vert berre postulert, på same måte som eg har gjort over, og så arbeider ein vidare derifrå. Ein estimerer π frå gitte data og simulerer forsøket på kalkulator. Men det viktigaste og mest interessante, å vise at $2n/X$ verkeleg nærmar seg til π når n aukar, hoppar ein altså over. Innafor vidaregåande skule sitt 3MX/3MY pensum er det heller ikkje så vanskeleg å vise dette. Då bør det kanskje gjerast dersom dømet i det heile skal takast med?



På figuren er det teikna inn to av dei parallelle linene med avstand d . Nåla med lengde d dannar ein vinkel α med normalen på linene. Projeksjonen av nåla inn på normalen har lengde $l = d|\cos \alpha|$. For ein gitt vinkel α og tilfeldig plassering av nåla vil sannsynet for treff vere lik l/d ,

$$P(\text{treff} \mid \alpha) = \frac{l}{d} = \frac{d|\cos \alpha|}{d} = |\cos \alpha|.$$

Når nåla vert kasta frå tilstrekkeleg høgd vil vinkelen α vere uniformt fordelt på intervallet $0-2\pi$, og $P(\text{treff} \mid \alpha)$ varierer med α som vist i figuren under.



Ved kast av nål vil både vinkelen α og posisjonen for landing vere tilfeldig og uniformt fordelt. Det ubetinga sannsynet $P(\text{treff})$ er lik gjennomsnittsverdien av $P(\text{treff} | \alpha)$.

$$\begin{aligned}
 P(\text{treff}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\text{treff} | \alpha) d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \alpha| d\alpha = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \\
 &= \left[\frac{4}{2\pi} \sin \alpha \right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{2\pi} (1 - 0) = \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

Sannsynet for treff er altså lik $2/\pi$. Store tals lov gir då at $X/n \rightarrow 2/\pi$ når $n \rightarrow \infty$, som omforma gir oss at $2n/X \rightarrow \pi$ når $n \rightarrow \infty$. Sagt på ein annan måte så har vi at $\hat{P} = X/n$ er ein forventningsrett estimator for $2/\pi$. Dermed vert $\hat{\pi} = 2n/X$ ein forventningsrett estimator for π .

Denne metoden for å estimere π byggjer på tilfeldige prosessar og er dermed ein Monte Carlo metode. Den er eit godt døme på at MC også kan nyttast til å løyse problem som ikkje er tilfeldige (stokastiske) av natur, og som vi dermed er vane med å angripe med meir "tradisjonelle" matematiske verkty. Generelt kan Monte Carlo nyttast på alle problem der det er mogleg å etablere ekvivalens mellom det ynska resultatet og venta oppførsel til eit stokastisk system.

Sett at vi ynskjer å finne π med minst fire sikre siffer, kor mange kast må vi då til med? Svaret er ganske enkelt: *Meir enn vi nokon gong kjem til å orke!* For å analysere dette spørsmålet treng vi igjen kjennskap til intervallestimering. Dette er no pensum i 3MX/3MY, så vi tek sjansen.

Talet på treff X etter n kast er binomisk fordelt, X er $\text{bin}(n, 2/\pi)$. Av dette følgjer at variansen til X er

$$V(X) = np(1-p) = n \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

For $\hat{P} = X/n$ gir dette

$$V(\hat{P}) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{V(X)}{n^2} = \frac{\frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)}{n} \approx \frac{0.23134}{n}.$$

Eit 95% konfidensintervall for $P = 2/\pi$ vert då (i resten av avsnittet vert det rekna med 95% konfidensintervall som underforstått):

$$\hat{P} \pm 1.96\sqrt{\frac{0.23134}{n}} \approx \hat{P} \pm \frac{0.9427}{\sqrt{n}}$$

Dette gir ein relativ feil i \hat{P} på $0.9427/(\hat{P}\sqrt{n})$. Sidan vi har samanhangen $\hat{\pi} = 2/\hat{P}$ vil relativ feil i $\hat{\pi}$ vere den same som relativ feil i \hat{P} , sjå t.d. [Breiteig/Venheim]. Dette gjeld når relativ feil i \hat{P} er liten, noko vi oppnår med stor n .

Eit 95% konfidensintervall for π vert då

$$\hat{\pi} \pm \frac{0.9427}{\hat{P}\sqrt{n}}\hat{\pi} = \hat{\pi} \pm \frac{0.9427}{\frac{2}{\pi}\sqrt{n}}\hat{\pi} \approx \hat{\pi} \pm \frac{0.9427}{2\sqrt{n}}\pi^2 \approx \hat{\pi} \pm \frac{4.65}{\sqrt{n}}.$$

Vi får ei uvisse i fastsetjing av π gitt ved $4.65/\sqrt{n}$. Denne minkar når n aukar, som den bør, men er dessverre ganske stor. Til høgre er det tabell over denne uvissa rekna ut for nokre verdiar av n . Ser at etter så pass som ein million kast, nesten 278 timars kasting med eit kast i sekundet, har vi ikkje fått π med meir enn tre sikre siffer (to desimalar). Kor mange kast som trengst for fire sikre siffer greier du no å rekne ut sjølv, men eg er ganske sikker på at du aldri orkar å gjennomføre kastinga.

| Kast n | Uvisse i $\hat{\pi}$ |
|-----------|----------------------|
| 10 | 1.47 |
| 100 | 0.465 |
| 1 000 | 0.147 |
| 10 000 | 0.0465 |
| 100 000 | 0.0147 |
| 1 000 000 | 0.00465 |

Det bør no nemnast at uvissa vi har rekna ut så langt berre er den som er av reint statistisk art. I tillegg kjem systematiske feilkjelder. Dette kan vere at nåla ikkje har nøyaktig same lengd som linjeavstanden, at det i enkelte tilfelle er vanskeleg å skilje mellom kryssing av linje og berøring, samt andre forhold. For store verdiar av n vert desse systematiske feilkjeldene større enn dei statistiske. Etter at den grensa er nådd nyttar det ikkje kor lenge vi held fram med å kaste, vi får ikkje fleire sikre siffer i π likevel.

Som ein konklusjon kan vi kanskje driste oss frampå med at dette nok er ein elendig metode til å finne π med mange desimalar. Det har vi langt betre metodar til. Nyttå på rette måten er dette likevel eit forsøk som illustrerer mange vesentlege sider både ved Monte Carlo simulering og intervallestimering. Særleg interessant tykkjer eg det er med den noko uventa koplinga mellom tilfeldige prosessar og det absolutt ikkje tilfeldig talet π .

MC på kalkulator og datamaskin

Som nemnt lenger oppe i artikkelen, kan datamaskiner og grafiske kalkulatorar nytast til å kaste terningar og dermed spare oss for ein del arbeid. På datamaskin kan dette gjerast t.d. med eit reknearkprogram. Utgangspunktet for all Monte Carlo på slikt utstyr er ein innebygd generator for tilfeldige tal, ein random-funksjon. Denne kan ulike maskinprodusentar ha gitt ulike namn t.d. **rand**, **ran#**, **rndm** eller anna. Formålet er derimot alltid det same, eit kall returnerer eit tilfeldig tal uniformt fordelt i intervallet $\langle 0,1 \rangle$. I det følgjande nyttar eg skrivemåten **rand**.

Rand gir ulikt tal for kvar gong den vert brukt og resultatet ved neste gongs bruk er tilsynelatande uforutseibart, men det er berre tilsynelatande. Generatoren gir nemleg ein fast sekvens av tal som berre har som formål å sjå tilfeldige ut. Dersom t.d. to Texas kalkulatorar begge gir det tilfeldige talet 0.0747914437 veit vi at neste kall til **rand** gir talet 0.8022691454 på begge kalkulatorar. Ein slik "forutseibar" generator av tilfeldige tal vert kalla pseudotilfeldig, og er den typen vi finn brukt både i kalkulatorar og datamaskiner.

Kan dette vere godt nok då, bør ikkje eit tilfeldig tal verkeleg vere tilfeldig? I utgangspunktet bør det vere det. Å bygge slike ekte tilfeldig tal generatorar inn i datamaskiner er derimot ikkje så helt enkelt. I så fall må dei vere baserte på tilfeldige fysiske prosessar som er bygde inn i maskina. Dette kan vere radioaktive kjelder eller støy i elektriske kretsar. Å få slike ekte generatorar raske nok er både vanskeleg og dyrt. Radioaktive kjelder inne i kalkulatoren er heller ikkje særleg hyggjeleg. God uniform fordeling er også vanskeleg å oppnå, ja nesten umogleg. Pseudotilfeldige generatorar er derimot teoretisk godt kjende, og rimelege. Så lenge dei gir talsekvensar som ein statistikar med alle moglege statistiske testar til rådvilde ikkje greier å skilje frå verkeleg tilfeldige talsekvensar, er vi nøgde.

Ei lita åtvaring: Dersom du nyttar ei datamaskin til trekking i eit lotteri må du vere på vakt slik at ikkje same nummerliste vert trekt ut i to ulike trekningar.

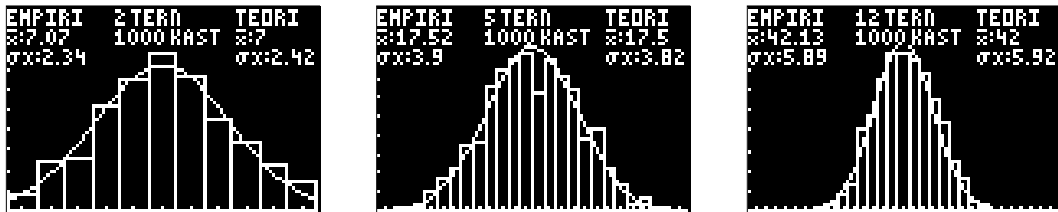
Med utgangspunkt i **rand** kan vi så lage ein terning med **int(6rand+1)**. Dette må kanskje forklarast litt. **Rand** gir tal i området $\langle 0,1 \rangle$, **6rand** strekkjer dette ut til området $\langle 0,6 \rangle$ og **6rand+1** forflyttar til tal i området $\langle 1,7 \rangle$. Funksjonen **int(x)** gir heiltalsverdien til **x** slik at $x \in [1, 2 >$ gir resultat 1, $x \in [2, 3 >$ gir resultat 2 o.s.b.. Av dette følgjer at **int(6rand+1)** gir heiltal i området 1–6 der alle har like stort sannsyn, $P=1/6$. Ein terning altså. Ynskjer vi sum av to terningar kan det gjerast med **int(6rand+1) +int(6rand+1)**. Dette kan så utvidast til alle moglege slag terningkombinasjonar, myntkast o.s.b.. 1

Dersom ein ynskjer å utføre kompliserte simuleringar krev det programmering av kalkulatoren eller datamaskina, men då er det heller nesten ingen grenser lenger. Vi skal sjå to døme på slike simuleringprogram, eit for histogrammering av avterningssum og eit for simulering av radioaktivitet. Begge programma er skrivne for Texas Ti-83 kalkulator. Programlisting finn du til slutt i artikkelen. Interesserte kan

få programma i elektronisk form frå forfattaren. Versjon for Ti-82 og Ti-92 er også tilgjengelege.

Sum av terningar

I avsnittet *Samling i sentrum* kasta vi fleire terningar og histogramerte summen. Programmet **ternsum** på Ti-83 gjer heile denne jobben. Det spør etter tal terningar og tal kast. Programmet "kastar" terningane og teiknar opp histogram med påskriven middelvei og standardavvik. For samanlikning vert ei normalfordeling i samsvar med sentralgrenseteoremet teikna på. Her er vist resultat av nokre kasteseriar med ulikt tal terningar og 1000 kast.



Ser tydeleg korleis fordelinga av terningkastresultatet nærmar seg til normalfordelinga slik sentralgrenseteoremet seier.

Radioaktivitet

Programmet **radioakt** simulerer radioaktivitet slik som omtala i avsnittet *"Atom, er ikkje det farleg då?".* Programmet spør etter talet på atom (terningar) og dernext etter sannsyn for sundfall. Dette sannsynet kan setjast til eit vilkårleg tal i området 0–1. Ein er dermed ikkje avhengig av heilt tal sjettedeler som ved simulering med terningar. Teoretisk kurve vert teikna, samt resultatet etter kvart som kastinga skrid fram. Halveringstid for kastinga og teoretisk halveringstid vert skrive ut til slutt. Figurane under viser resultat av nokre kasteseriar som alle starta med 200 atom og ulikt sannsyn, 0.17 er terningsannsynet.



Programlisting

Ternsum

```

ClrHome
Disp " "
Input "ANT. TERNINGAR: ", N
Input "ANTAL KAST : ", M
N→A
6N→B
B-A+1→D
int(D/40)+1→S
int((D-.5)/S)+1→D
((B+A)/2)-0.5S*D→A
A+S*D→B
D→dim(LX):D→dim(LF)
seq(X,X,A+S/2,B,S)→LX:Fill(0,LF)
FnOff
PlotsOff
"MS(1/(W√(2π)))e^(-.5((X-
V)/W)²)"→Y9
3.5N→V
√(17.5/6)√(N)→W
A→Xmin:B→Xmax:S→Xsc1
0→Ymin:1.3*Y9(V)→Ymax:int(Ymax/10)→
Ysc1
DispGraph
0→T:0→U
For(I,1,M,1)
0→J
For(K,1,N,1)
J+int(6rand+1)→J
End
T+J→T:U+J²→U
int((J-A)/S+1)→K
LF(K)+1→LF(K)
If LF(K)≠1:Line(A+S(K-1),LF(K)-
1,A+SK,LF(K)-1,0)
Line(A+S(K-1),LF(K)-1.1,A+S(K-
1),LF(K))
Line(A+S(K-1),LF(K),A+SK,LF(K))
Line(A+SK,LF(K),A+SK,LF(K)-1.1)
End
Plot3(Histogram,LX,LF)
0→Ymin:1.3*max(LF)→Ymax:int(Ymax/10
)→Ysc1
DispGraph
Text(0,0,"EMPIRI")
Text(6,0,"x:",round(T/M,2))
Text(12,0,"σx:",round(√(U/(M-1)-
T²/(M(M-1))),2))
Text(0,33,N," TERN")
Text(6,33,M," KAST")
Text(0,70,"TEORI")
Text(6,70,"x:",round(V,2))
Text(12,70,"σx:",round(W,2))
Stop

```

Radioakt

```

ClrHome
Normal
Float
Disp " "
Input "ANTAL ATOM : ", N
Lbl P
Input "SANNSYN : ", P
If (P≤0) or (P≥1):Then
Disp "ULOVFLIG P", P
Goto P
End
25→K
K+1→dim(LX):K+1→dim(LF)
seq(X,X,0,K,1)→LX:Fill(0,LF)
0→Xmin:K+1→Xmax:1→Xsc1
0→Ymin:1.2N→Ymax:10→Ysc1
FnOff:PlotsOff
N→M
"M(1-P)^(X-.5)"→Y9
N→LF(1)
DispGraph
Line(0,N,1,N)
Line(1,N,1,0)
For(I,2,K+1,1)
N→LF(I)
For(J,1,N,1)
If rand<P
LF(I)-1→LF(I)
End
LF(I)→N
Line(I-1,N,I,N)
Line(I,0,I,N)
End
Plot3(Histogram,LX,LF):DispGraph
2→I
While (LF(I)>LF(1)/2) and (I≤K+1)
I+1→I
End
Text(0,50,"ATOM : ",M)
Text(6,50,"SANNSYN : ",round(P,2))
Text(12,50,"HALV.TID : ",I-1)
Text(18,50,"TEO.HALV :
",round(ln(0.5)/ln(1-P),1))
Stop

```

Referanser

- [Lysø] Lysø, K. O., 1995: *Statistikk II: Sannsynlighetsregning og statistisk metodelære*, Caspar Forlag.
- [Hagen] Hagen, P. Cr., 1996: *Innføring i sannsynlighetsregning og statistikk*, Cappelen Akademiske Forlag as.
- [Breiteig/Venheim] Breiteig, T. og Venheim, R., 1993: *Matematikk for lærere, bind I*, Tano, side 221.