FASIT OG TIPS til
Rinvold: Visuelle perspektiv.
Lineær algebra.
Caspar forlag, 1.utgave 2003 og 2.opplag 2004.

Versjon 07.01.09.

Det er ikke tatt med svar på alle oppgaver. Denne fasiten vil bli oppdatert etter hvert. Oppdager du trykkfeil i boka eller feil i fasiten, så send en e-post til reinert.rinvold@hihm.no

TRYKKFEIL I BEGGE UTGAVER

Side 13: Andre linje etter andre ligningssystem. Skal være (2t, 4-2t) på den doble hastigheten, ikke som det står.

Side 13: Midt i eksempel 1.4.1. Skal være y = 6 − x − z = 6 − (4-t) − t = 2. Her var det falt ut en parentes.

Side 104: Her er P feil. Skal være $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Dermed blir også S feil.

Den skal være $D = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

TRYKKFEIL I 1. UTGAVE 2003 (Feilene er rettet i 2.opplag 2004)

Side 38: I oppgave 3.1b siste linje skal det være x i stedet for z. Oppgaven kan løses slik den står, men det var ikke meningen at den skulle være en felle. Fasiten er basert på at z byttes ut med x.

Side 39: Oppgave 3.4. Oppgave a) er bare 5x + 7y = 35. De to neste ligningene utgjør b).

Side 40: Andre avsnitt av eksempel 3.3.1, tredje linje. Det skal være L(y, y), ikke L(x, y). Dette er koordinatene til punktet L.

Side 41: Tabell i eksempel 3.3.2. Under (2,0) skal det stå (1,1), ikke (0,1).

Side 68: Andre formel for OA skal være **OA** = 300 **i’’** + 4**j**. Her er **i’’** måleenhet for cm. Siste linje før eksempel 4.1.3: Hjørnet er øverste høyre hjørne i flaten som vender mot oss.

KAPITTEL 1

1.1

a) $x = -(2/3)t + 1$, $y = t$, $z = (5/3)t$.

b) $x = 10$, $y = -27/2$, $z = -45/2$.
$x = -1$, $y = 3$, $t = 5$.

c) Vi får den tredje ligningen ved å summere de to første. Alle punkter som ligger i begge de to første planene ligger derfor i det siste planet. Skjæringslinja mellom de to første planene, ligger derfor i det siste planet. Ved å endre høyresiden i den siste ligningen, får vi et parallelt plan til det tredje planet. Dette har ingen felles punkter med det tredje planet. Derfor har systemet ingen løsning.

d) Nå får vi et nytt tredje plan som ikke er parallelt med det opprinnelige. Skjæringslinja mellom de to første planene vil derfor skjære det nye (tredje) planet i ett punkt. Systemet har derfor nøyaktig en løsning.

1.3

a) Finner tilbakelagt strekning med Pythagoras setning. Farten blir 2,2 km/h. (2,236)

b) $x = 2t$, $y = 3 - 4t$. Pål og Mari bruker bare 3/4 time.

1.4

a) $x = t$, $y = t - 1$.

b) $x = t + 2$, $y = t + 1$.

c) $x = 5 - t$, $y = 4 - t$.

1.5

a) $x = s$, $y = t$, $z = 6 - s - t$.

b) $s = 1$, $t = 0$, gir $A(1,0,5)$. $s = 2$, $t = 3$, gir $B(2,3,1)$.

c) $x = s + t$, $y = 3t$, $z = 6 - s - 4t$.

d) $x = 1 + t$, $y = 3t$, $z = 5 - 4t$. Vi starter i A når $t = 0$ og ender i B når $t = 1$.

KAPITTEL 2

2.1

a) $S_F = \begin{bmatrix} 15 & 3 & 5 \\ 20 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad S_T = S_J + S_F = \begin{bmatrix} 20 & 5 & 8 \\ 31 & 7 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 3 & 5 \\ 20 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 8 & 13 \\ 51 & 12 & 24 \end{bmatrix}$

b) $S_{J93} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 5 & 8 \\ 31 & 7 & 20 \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} 500 & 600 \\ 400 & 450 \\ 300 & 350 \end{bmatrix}$ $\quad S_J \cdot P = \begin{bmatrix} 20 & 5 & 8 \\ 31 & 7 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 500 & 600 \\ 400 & 450 \\ 300 & 350 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14400 & 17050 \\ 24300 & 28750 \end{bmatrix}$

2.2 Bruk grafisk kalkulator eller quickmath.com som fasit.

2.5 Denne oppgaven har til hensikt å gi mening til et matriseprodukt mellom en identitetsmatrise og en annen matrise. Poenget er ikke at dette er "nyttig", men å gi en praktisk situasjon som viser hvor naturlig det er at en identitetsmatrise faktisk ikke forandrer på matrisen den multipliseres med.

2.6

a) Her finnes mange rette svar. En normalvektor til [1,3] er [-6,2]. Det gir $B = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Du kan godt ha forskjellige normalvektorer i første og andre kolonne.

b) De to vektorene [1,3] og [2,1] er ikke parallelle og utspenner derfor to forskjellige linjer gjennom origo. En normal til vektoren [2,1] er derfor ikke normal på [1,3]. Hvis de to vektorene tegnes på et flatt ark, må en felles normal peke rett ut fra arket. Komponentene til svarmatrisen består av de fire mulige skalarproduktene mellom radene i matrisen til venstre og kolonnene i den til høyre. Skalarprodukter er null bare hvis en av vektorene er nullvektoren eller de to matrisene står normalt på hverandre.

c) Kryssproduktet gir en normal til to vektorer i rommet under forutsetning av at ikke vektorene er parallelle og ingen av vektorene er nullvektor. Vi har [1, 2, 3] x [2, 0, 5] = [10, 1, -4], se kap.3 i "Kompendium i geometri". Det gir a = 10, b = 1 og c = -4.

Et eksempel på nulldivisorer: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & -8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

En enda enklere mulighet for nulldivisor er å la alle rader være like i den første matrisen. Da trenger du bare å finne en normal til denne ene vektoren.

2.8

a) Du må løse ligningssystemet $2x + 3y = 8$
$4x + 5y = 14$

b) Du får $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ og så $\begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$, som gir x = 1 og y = 2.

c) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix}$

2.9

a) $AB = \begin{bmatrix} 10 & 36 & -2 & 50 \\ 11 & 20 & -5 & 27 \\ 6 & 9 & -3 & 12 \end{bmatrix}$, $(AB)^T = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 6 \\ 36 & 20 & 9 \\ -2 & -5 & -3 \\ 50 & 27 & 12 \end{bmatrix}$

$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 0 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Får $B^TA^T = (AB)^T$.

b) Hvis A er 5 x 7 og B er 7 x 11 matriser, så er AB en 5 x 11 og $(AB)^T$ en 11 x 5 matrise. Da er B^T en 11 x 7 og A^T en 7 x 5 og matrise, så B^TA^T er en 11 x 5 matrise. De to matrisene $(AB)^T$ og B^TA^T har altså samme form. Dette gjelder også om 5 erstattes med n, 7 erstattes med m og 11 med p.

For å vise at skalarproduktene som bestemmer tilsvarende komponenter i $(AB)^T$ og B^TA^T blir de samme, så tenk på fjerde rad og tredje kolonne i svaret. Fjerde rad og tredje kolonne i $(AB)^T$ er det samme som tredje rad og fjerde kolonne i AB. Dette er igjen skalarproduktet mellom <u>tredje rad i A og fjerde kolonne i B</u>. Fjerde rad og tredje kolonne i B^TA^T er skalarproduktet mellom fjerde rad i B^T og tredje kolonne i A^T. Men fjerde rad i B^T er fjerde kolonne i B og tredje kolonne i A^T er tredje rad i A. Altså snakker vi om skalarproduktet mellom <u>fjerde kolonne i B og tredje rad i A</u>. Skalarproduktet er kommutativt (faktorenes orden er likegyldig), så de to komponentene er like. Tilsvarende argumentasjon ville fungert like godt for en annen komponent i svaret, så beviset er generelt.

2.11

a) $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}0\\7\end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3 & 7\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}4 & 0\end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}8 & 2\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}2 & 7\end{bmatrix}$.

KAPITTEL 3

3.1

a) $\begin{bmatrix}7 & 2 & 6\\5 & -3 & 3\\-1 & 11 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7 & 5 & -1\\2 & -3 & 11\\6 & 3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

Vanligvis velger vi bare avbildningen basert på kolonnevektorer.

b) $\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 7\\2 & 3\\7 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\10\\15\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 4 & -3 & 6\\3 & -11 & 4 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$

3.2

b)

$$\begin{aligned}2x + 4y + z &= 3\\ y - 3z &= 4\\ 5x + 5y + 8 &= 9\end{aligned}$$

3.3

a) t =4 gir (11, 4).

b) y = (1/2)x − (3/2).

c) Det finnes mange, for eksempel $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$

3.4

a) $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$ er en mulighet. Retningsvektoren er valgt med riktig stigningstall og med heltallige komponenter. Vektoren som legges til svarer til et punkt på linja. Merk at en parameterfremstilling med heltallige komponenter kan brukes til å løse ligningen som diofantisk ligning, jfr. tallære.

b) En mulighet er $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Denne er funnet ved å løse ligningssystemet uttrykt ved z. De som har arbeidet med romgeometri kan alternativt finne en retningsvektor ved å ta kryssproduktet av de to normalvektorene til planene.

3.5

a) En mulighet er $x + y - 5z = 26$. Merk at normalvektoren til dette planet står normalt på retningsvektoren til linja.

b) Ligningen for planet er $-5x + 2y + z = 0$.

3.6

a) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

3.7

a) Speiling om x-aksen. b) Speiling om linja med ligning y = 2.

c) Hvert punkt avbildes på et punkt hvor retningsvektoren er tre ganger så lang og beholder retningen. (Dette er en similaritet)

d) Glidespeiling med vektoren [3,3] langs aksen med ligning y = x. (Det lønner seg først å finne ut hva avbildningen blir uten 2 x 1 vektoren som adderes sist i formelen.)

3.8

a) $R \cdot H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $S_1 \cdot H = H \cdot S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. (Dette er speiling om y = x.)

3.9

a) x′ = 1 – y, y′ = x – 1. $R_1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) x′ = -x + 2, y′ = -y. $H_1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $R_0 \cdot R_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Rotasjonssentrum blir (1/2, 1/2).

d) $H_0 \cdot H_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dette er en parallellforskyvning med vektoren [-2,0].

e) $H_1 \cdot R_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3.10

a) Similaritet som avbilder et punkt ved å firdoble lengden av posisjonsvektoren og beholde retningen. Invers gjør "det motsatte": $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

b) Tilsvarende. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

c) Speiling om linje med ligning y = x, er sin egen invers: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) Similaritet i rommet. Posisjonsvektoren til et punkt beholder retning, men blir 5 ganger så lang. Invers: $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

3.11

a) $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 12 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 35 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 36 & 23 \end{bmatrix}$ e) første ligning (av 4): 2x – 3y = 1.

3.12

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45 \\ 33 \\ -13 \end{bmatrix}$$

3.13

a) 2x + 3y = 1 b) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er to eksempler.

b) Hvis [2 3] har en venstreinvers A, så vil $A \cdot [2 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \cdot [1]$. Det gir

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A$. Det tilsier at A er den eneste høyreinvers til [2 3], i motstrid til b).

3.14

a) Poenget er at det for å unngå opphopning må kjøre like mange biler inn som ut av hvert kryss. Dette gir oss en ligning for hver av kryssene.

$I_2 = I_1 + 50$, $I_2 = I_3 + 150$, $I_4 = I_3 + 200$, $I_4 = I_1 + 100$

Løsningen uttrykt ved en parameter t for I_4 er:

$I_1 = t - 100$, $I_2 = t - 50$, $I_3 = t - 200$, $I_4 = t$.

For at alle løsningene skal være positive, må t> 200. Løsningen med t = 200 gir det minst mulige antallet biler som oppfyller betingelsene. Da er $I_3 = 0$. (Vi kan for øvrig se direkte fra figuren hvilke minimumsverdier av trafikk de enkelte vegene må ha.)

Når t vokser betyr det at bilene gjennomsnittlig kjører lenger inne i rundkjøringen. Vi må imidlertid opp i t = 251, dvs. $I_3 = 51$, for at vi er sikre på at noen biler kjører mer enn en runde før de forlater rundkjøringen. Forklar selv at $I_3 = 50$ er forenlig med at ingen bil kjører en hel runde eller mer.

b) T har ingen invers fordi matriseligningen over har flere enn en løsning. (En koeffisientmatrise med invers medfører nøyaktig en løsning.)

3.15

a) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2\cdot 4 - 1\cdot 7}\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{2} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 42 \\ 6 & 23 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-3} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\right)^{3} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{3} = \begin{bmatrix} 134 & -245 \\ -35 & 64 \end{bmatrix}$$

For hånd kan du opphøye i tredje ved først å opphøye i andre og så gange med matrisen.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-3}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{2} = \begin{bmatrix} 134 & -245 \\ -35 & 64 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & 42 \\ 6 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

b) $\left(\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-3}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 134 & -245 \\ -35 & 64 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 64 & 245 \\ 35 & 134 \end{bmatrix}$

Tilsvarende er

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{(-3\cdot -1)} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{3} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{2}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 42 \\ 6 & 23 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 245 \\ 35 & 134 \end{bmatrix}$$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{9} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{3\cdot 3} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{3}\right)^{3} = \begin{bmatrix} 64 & 245 \\ 35 & 134 \end{bmatrix}^{3} = \begin{bmatrix} 2508794 & 9604735 \\ 1372105 & 5253004 \end{bmatrix}$

Poenget er ikke her at du ikke kan bruke kalkulator, men at du ikke bruker kalkulatorenes mulighet til å regne direkte med matriser! (Her kan matrisen først opphøyes i andre.)

3.18

a) $A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1+1} \\ y_{1+1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_{0+1} \\ y_{0+1} \end{bmatrix} = AA\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. 75 kasser var i bruk etter 2 år.

c) Dette er en generalisering av resultatet fra b. Hver multiplikasjon med A fra venstre fører oss ett år fremover.

d) 75 kasser i bruk. Antall kasser i bruk vil stabilisere seg på 75. Det gjelder selv om starttilstanden er noe annet enn 70 kasser i bruk.

3.19

a) $x_1 = 0{,}85\, x_0 + 0{,}10 y_0 + 0{,}10 z_0$
$y_1 = 0{,}05\, x_0 + 0{,}55 y_0 + 0{,}05 z_0$
$z_1 = 0{,}10 x_0 + 0{,}35 y_0 + 0{,}85 z_0$

b) $M = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}55 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}35 & 0{,}85 \end{bmatrix}$

d) A, B og C har henholdsvis 28,75%, 22,5% og 48,75% av markedet.

e) M^n vil nærme seg $\begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$. Den stabile tilstanden er at markedsandelene til A, B og C er henholdsvis 40%, 10% og 50%.

3.20

a) $M = \begin{bmatrix} 1{,}1 & -0{,}04 \\ 0 & 1{,}02 \end{bmatrix}$ b) Lånet er på 8050 kr og fondet på 395 850 kr.

c) Lånet blir nedbetalt det 15. året. Derfor skal ikke lenger 4% av fondets avkastning brukes til nedbetaling av lån og ligningen fra a) gjelder derfor ikke.

3.21

a) $x_{n+1} = 0{,}7\, x_n + 0{,}1 y_n + 0{,}1 z_n$
$y_{n+1} = 0{,}2\, x_n + 0{,}6 y_n + 0{,}1 z_n$
$z_{n+1} = 0{,}1 x_n + 0{,}3 y_n + 0{,}8 z_n$

b) $M = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}8 \end{bmatrix}$

c) 1996 svarer til n = 2. A har 23,2% - B har 33,2% og C har 43,6 % markedsandel. Du setter $x_0 = 0{,}2$ $y_0 = 0{,}6$ og $z_0 = 0{,}2$.

d) M^n vil nærme seg $\begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ etter hvert som n vokser. Den stabile tilstanden blir A og B 25% og C 50%.

KAPITTEL 4

4.1 100 C tilsvarer 212 F. Formel: F = (9/5)C +32.

4.2

a) t' = 3600t. s' = 1000s. Fra km/h til m/s: dele på 3,6.

b) $P = \begin{bmatrix} 3600 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$ c) $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3600} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1000} \end{bmatrix}$

4.3

a) A: [2,3] = (1/2)**u** + (3/2)**v**, så (x', y') = (1/2, 3/2).

B: [4,5] = (3/2)**u** + (5/2)**v**, så (x', y') = (3/2, 5/2).

C: [-1,2] = -2**u** + **v**, så (x', y') = (-2, 1).

b) x' = x – (1/2)y, y' = (1/2)y.

c) $P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

d) $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (sier det deg noe i forhold til **u** og **v**?)

4.4

a) x' = y, y' = x + y.

b) c) Med notasjon fra 4.3: **u** = [-1, 1] og **v** = [1, 0].

4.5 a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.6 $S_3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $S_4\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$

4.7 $R_1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad R_2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

4.8

a) Lineær, $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Ikke-lineær. For eksempel er G(1,1) + G(1,1) ikke det samme som G(1+1, 1+1).

c) Lineær, $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

d) Lineær, $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

e) Ikke lineær. For eksempel er L(0,0) = (1, 1), altså ikke origo.

f) Lineær, $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

4.9

a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.10

Dette svarer til matriserepresentasjoner $[\ ]$, hvor t er et tall. Dette er funksjoner p(x) = tx, altså funksjoner som uttrykker proporsjonalitet. Eksempler er p_2x) = 2x og $p_3(x) = 3x$.

4.11

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

4.12

a) $A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$. b) $A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}$

c) $B^T B = \begin{bmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 77 & 118 \\ 50 & 118 & 194 \end{bmatrix}$. $B \cdot B^T = \begin{bmatrix} 64 & 78 & 90 \\ 78 & 91 & 108 \\ 90 & 108 & 126 \end{bmatrix}$

4.13

På både a, b og c vises det at dette er kongruensavbildninger ved å påvise at kolonnevektorene er parvis normale og har lengde 1.

a) det(A) = -1 gir at det er en speiling. Vektoren [1,0] avbildes på vektoren [4/5, 3/5]. Vinkelen mellom disse vektorene er 36,87… grader. Speilingslinja er halveringslinja mellom disse to vektorene tegnet med start i origo. Vinkelen me llom x-aksen og linja blir 18,43 grader.

b) det(B) = 1 gir at det er en rotasjon. Her blir [1,0] rotert på [5/13,-12/13]. Rotasjonsvinkel er –67,38 grader.

c) det(C) = 1. (Volum av rektangulær boks med grunnflate 1 og høyde 1. Positivt orientert koordinatsystem av kolonnevektorer.) Dette blir rotasjon om z-aksen med 53,13 grader.

4.15

a) En kvadratisk matrise S representerer en similaritet hvis det finnes et tall k og en ortogonal matrise A slik at S = kA. Motsatt så har en hver similaritet i planet med origo som fikspunkt en slik matriserepresentasjon.

b) Kolonnevektorene er like lange og er parvis normale. Lengden av kolonnevektorene er 5, så k = 5.