Ketil Bergesen

GeoGebra – en kroppslig tilnærming

GeoGebra er et ypperlig program for arbeid med både geometri og algebra i mange sammenhenger. Det er gratis og har blitt stadig forbedret gjennom årenes løp. Denne teksten er knyttet til geometridelen.

Skolematematikken oppfattes ofte som noe statisk. I geometrien kommer dette til utrykk for eksempel ved at en sirkel er en runding - en bestemt form, en vinkel på 180 grader er en rett linje med en liten strek på seg.

I lærerplanens kompetansemål etter 4. årstrinn står det i geometridelen blant annet:

> Mål for opplæringa er at eleven skal kunne […] kjenne att og beskrive trekk ved sirklar, mangekantar, kuler, sylindrar og enkle polyeder.

Hva betyr det å beskrive *trekk* ved geometriske figurer? Det er nærliggende å tenke dynamisk og strukturelt. En sirkel må forståes som noe mer enn en visuell form. Alle punktene på en sirkel deler en bestemt egenskap, de har samme avstand til sentrum. Vinkelbegrepet må også utfordres, for eksempel som et mål på dreining – en helomvending (ville halvomvending vært et bedre ord?).

Ketil Bergesen
Høgskolen i Bergen
ketil.arne.bergesen@hib.no

Gjennom arbeid med GeoGebra tror jeg denne statiske forståelsen vil utfordres.

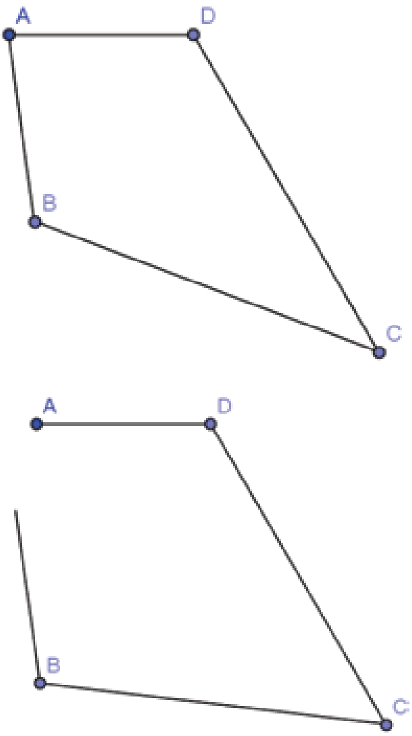
Når programmet introduseres for nye brukere, om det er voksne eller barn, rår det ofte en viss forvirring. De kan for eksempel tro at programmet har hengt seg opp om de prøver å dra i et punkt som nekter å lystre. En tangent til en sirkel som er trukket ved hjelp av et linjestykke bestemt av to frie punkter som akkurat berører en sirkel skaper forvirring fordi den ikke følger med når sirkelen endres

Arbeidene ender ofte opp som en «tegning» som ser ut til å ha de kvalitetene en konstruksjonsoppgave etterspør. Men om man går konstruksjonen etter i sømmene, klikker og drar i punktene oppfyller ofte ikke figuren krav som er satt til den. Et eksempel på dette er følgende oppgave:

> Konstruer en drake som har sidekanter 2 og 4.

Oppfordring til leseren: prøv å tenke ut hvordan du ville gått frem, før du leser videre)

Eksempel på en besvarelse av drakeoppgaven er gjengitt først i figur 1. Alt ser bra ut, men trekker en for eksempel i punkt B, henger ikke lenger figuren sammen. Egenskapene som kjennetegner en drage er med andre ord ikke ivaretatt. Det kan være den som har laget figu-



Figur 1

ren er fornøyd med det visuelle resultatet, men ikke fullt ut forstår hva slags frihet hun har gitt- eller begrensninger hun har pålagt punkter eller linjer, altså hvilke regler elementene må følge. Den siste handlingen kan ha vært å bestille et linjestykke med bestemt lengde 2 fra B og så dratt litt i punktene B og D til enden på det siste linjestykke ligger oppå A. Å tegne i GeoGebra er vesensforskjellig fra å bruke papir og blyant, der elementene låses på arket, uten at egenskaper presiseres.

I forsøk på å få klarere frem begrensninger vi pålegger- eller frihet vi gir når vi bruker en funksjon I GeoGebra, har jeg brukt små «rollespill» som innledning, før vi i det hele tatt åpner programmet. (Jeg mener at aktivitetene også egner seg for elever i skolen.):

Noen studenter tas med på gangen og får merkelapper A, B og C klistret på seg. De skal simulere punkter. De får regler for hvordan de skal oppføre seg i forhold til hverandre. Vi går inn i klasserommet igjen og de får så i tur og orden anledning til å bevege seg i henhold til regler de er pålagt. (Dette skal simulere klikk og dra i et punkt). De som ikke har tur blir i ro så lenge regelen er overholdt. Medstudentene skal som tilskuere undersøke hva som foregår, de skal identifisere de underliggende reglene.

Eksempel 1

Deltagerne får tildelt roller:

A får fritt spillerom (Det får jo det første punktet man avsetter) B får også fritt spillerom (et fritt punkt) mens C får i oppgave å være midtpunktet mellom A og B

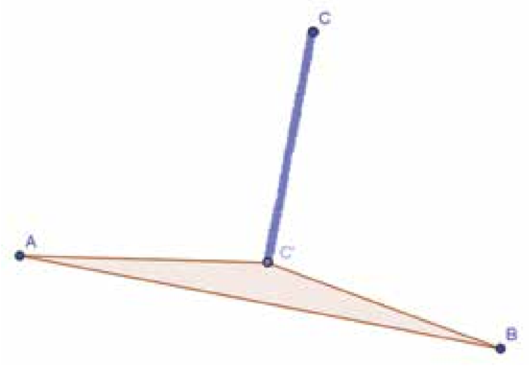
Så får A «klikke og dra» i seg selv. B forholder seg i ro, mens C må passe på å være midt i mellom de to. Når B har tur er A i ro og C gjør det samme. Men når det er C sin tur, kan hun ikke gjøre noe som helst. C er prisgitt A og B sine bevegelser. Tilskuerne gjetter nesten umiddelbart at C er midtpunktet.

Figur 2. A beveger seg fritt, C passer på å være midtpunkt:

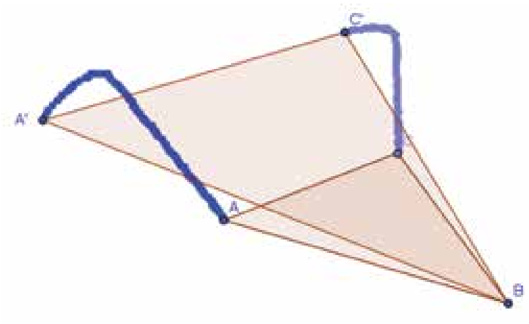
Eksempel 2

A og B får samme roller som i første eksempelet, men C får nå i oppgave å være like langt fra A som B, og samtidig bevare formen på trekanten ABC, med mindre hun har tur. Da kan C fritt bevege seg så lenge hun er like langt fra A som B (altså langs midtnormalen).

Når A har tur vil C bevege seg omtrent som vist i figur 3.



Figur 4



Figur 3

Når det er C sin tur kan hun bevege seg langs midtnormalen på AB (figur 4).

Der C stopper vil være førende for hvordan hun beveger seg når A og B har tur igjen. Hun vil igjen bevare formen på trekanten slik den var da hun stoppet. (Om C stoppet i C' vil hun når A eller B ha tur bevare formen på trekant ABC')

Slike øvelser kan gi ny og verdifull innsikt:

1. Basal kunnskap om egenskapene til forskjellige geometriske figurer. Hva er nødvendig og tilstrekkelig informasjon om hva som definerer for eksempel et rektangel. Finnes det fullgode alternative definisjoner?
2. Større klarhet i hva som styrer hva i GeoGebra, hvilken frihet de enkelte punkter/linjer/kurver har.
3. Arbeid med kroppslig konstruksjon fremmer kritiske spørsmål som: har punktene eller punktmengdene tilstrekkelig informasjon om seg selv til å oppføre seg skikkelig – eller kanskje har de for mye informasjon så de blir fratatt en frihet de burde ha? Finnes det flere løsninger? I det videre arbeidet med konstruksjon i GeoGebra kan deltagerne ta med seg tilsvarende spørsmål.
4. En økt forståelse for hva et geometrisk sted er – definert som samlingen av alle de stedene et punkt har lov til å gå basert på regler de skal følge. Regelen bestemmer stedet.

Går en tilbake til draken, kan det fort klart at her finnes det (uendelig) mange løsninger. For å ta vare på disse blir det viktig å reflektere som i punkt 3 over. Er alle løsninger ivaretatt? Kan det klikkes og dras i et hvilket som helst punkt og samtidig beholde de etterspurte egenskaper? To løsninger er tegnet i figur 5.

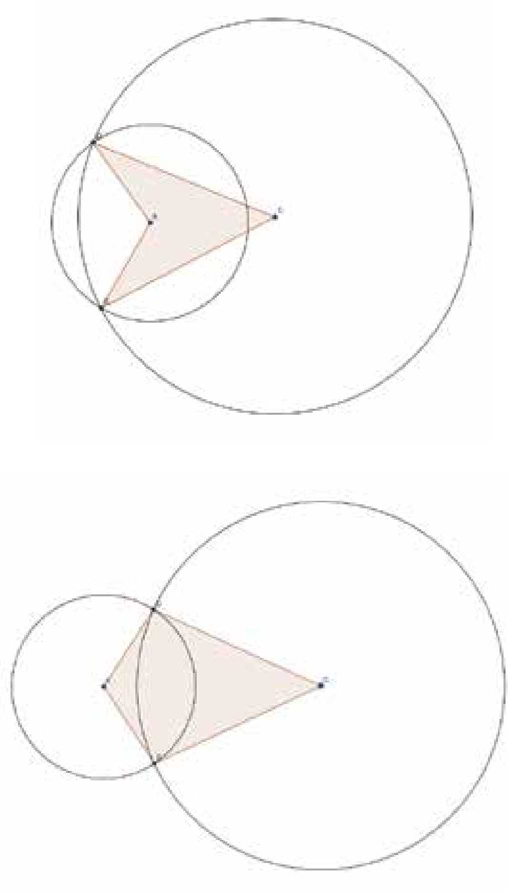
Med punkters frihet og krav til figuren i bakhodet, blir det nå en diskusjon om hvilke egenskaper figuren nødvendigvis må ha viktig. Gjør gjerne dette i par, der den ene spiller djevelens advokat.

En del prøving, feiling og justering i noen runder må påregnes.

Forklaring til konstruksjonen gjennomført i eksempel :

1. Sett av to frie punkter A og C.
2. Konstruer en sirkel med sentrum i A og fast radius 2 (sirkel definert ved sentrum og radius)
3. Konstruer en sirkel med sentrum i C og fast radius 4 (sirkel definert ved sentrum og radius)
4. Kall skjæringspunktene mellom de to siste sirklene for B og D, slik at orienteringen av punktene blir A, B, C, D når man går mot klokka.

En kroppslig konstruksjon av denne dragen involverer to tau med 2 lengdeenheter og to med 4 lengdeenheter som lager omrisset av draken.



Figur 5

A og C får nesten full frihet (hvorfor ikke full frihet?), mens B og D må holde tauene stramme. En utfordring å prøve ut med elever?

Innflytelse på skolematematikken?

Hva vil dynamiske geometriprogrammer gjøre med innhold, regler og konvensjoner i geometriundervisningen? Vil forståelsen av de underliggende strukturer og sammenhenger endres – til det bedre – når vi flytter oss fra papir og blyant- til digitalisert undervisning? Betrakt følgende oppgave:

> Konstruer en rettvinklet trekant ABC, der AB = 6 cm og vinkel B er 90 grader.

Den umiddelbare reaksjonen vil være at det er ikke tilstrekkelig opplysninger i oppgaven. Det underforståtte er opplagt: For få opplysninger til å få en entydig figur. Slik oppgaven er formulert har den uendelig mange løsninger. Så lenge kravene er oppfylt er det en løsning. Jeg vil oppfordre til bruk av slike oppgaver, da de naturlig avstedkommer en diskusjon om lovlighet og frihetsgrader.

Historisk sett var lovlig konstruksjon basert på Platons idéverden om det eksakte - kun det som kunne gjøres med en umarkert linjal og passer. Linjestykker stod markert som avtegnete lengder som kunne kopieres.

I dagens konstruksjon er det helt akseptert å bruke passeren til sette av en lengde ved hjelp av en markert linjal (AB = 6 cm), men det er fy å «konstruere» en rett vinkel ved hjelp av en gradskive.

Jeg håper og tror at dynamiske program vil flytte fokuset fra det konstruksjonstekniske til de underliggende ideer om hva eksempelvis en vinkelhalveringslinje *er*. De geometriske stedenes vesen kan komme tydeligere fram. Opplysninger i konstruksjoner blir ikke bare en instruks, men egenskaper som punkter eller punktmengder blir pålagt - som begrenser deres frihet.

For all del, gradskiva vil ikke besvare spørsmålet om hva en vinkelhalveringslinje egentlig er, men kanskje kan den tas fram når ideen er på plass?