

Geir Botten

# Matematikk læring og språk

Matematikkfaget har sitt språk med sin egen terminologi. Matematikkspråket er knyttet til og også en del av språket som brukes i samfunnet. Likevel oppleves matematikkens språk og terminologi ofte som fremmed og uforståelig for mange. For noen år siden deltok jeg på en samling der matematikere blant annet diskuterte ulike aspekter med matematikk og læring i matematikk. En av deltagerne uttrykte sin store skuffelse og frustrasjon over nivået blant norske lærere. Under et etterutdanningskurs i statistikk han hadde holdt for lærere i ungdomsskolen, hadde deltagerne sukket og stønnet da han presenterte formelen for aritmetisk middelværdi eller gjennomsnitt slik:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Han var spesielt frustrert over at mange også hadde problemer med skrivemåten:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Kanskje det fortsatt er slik at det er det matematiske symbolspråket og i hvilken grad en behersker det, som for mange er det viktigste

## Geir Botten

Høgskolen i Sør-Trøndelag

[geir.h.botten@hist.no](mailto:geir.h.botten@hist.no)

kriteriet for hvilken matematisk kunnskap en har tilegnet seg? Eller er det fortsatt slik at en del matematikere bruker et unødvendig abstrakt symbolspråk for å heve seg over andre og gjøre seg viktige og mer interessante? Jeg tror at det motsatte oftest er resultatet. Mange som i utgangspunktet ser på matematikk som nyttig og meningsfylt, blir i stedet opptatt av fagets særheter og utvikler blokkeringer og motstand mot faget. Resultatet blir fremmedgjøring og stor avstand fra menigmann til matematikk.

Når lærebøkene på småskoletrinnet innfører de fire regningsarter, brukes betegnelsene å addere, subtrahere, multiplisere og dividere. Disse ordene er ikke en naturlig del av barns ordforråd. De oppfattes som fremmedord som bare brukes i matematikkfaget i skolen. I det praktiske liv utenfor skolen bruker en betegnelsene å summere (legge sammen, til sammen, i alt), trekke fra (ta bort, forskjell, mangle), gange og dele. Når det brukes forskjellige begreper i og utenfor skolen, er dette med på å fjerne matematikken fra samfunnet rundt skolen. Det kan igjen føre til at barna får problemer med å knytte nødvendige forbindelser mellom det som skjer i skolen og i samfunnet utenfor skolen.

Det kan skape problemer når en velger termer innenfor matematikk der disse står i mer eller mindre konflikt med folks erfaringsverden. Behovet for klare og entydige betegnelser, kan stå i konflikt med behovet for å knytte mate-

matikkfaget til virkeligheten der matematikken skal brukes. Det er viktig å være klar over denne motsetningen. Dette betyr ikke at vi skal slutte å bruke matematisk terminologi. Snarere tvert i mot – termene må brukes oftere, og de må knyttes til elevenes hverdagsbegreper og hverdagspråk.

Når vi kommuniserer med andre mennesker, bruker vi språk. Vi uttrykker det vi vil si eller formidle gjennom lyder, ord, illustrasjoner, bilder eller en kombinasjon av elementer fra flere slike uttrykksmåter. Å betrakte matematikk som et språk, kan være en nyttig innfallsvinkel til å forstå hvordan læreprosessen i matematikk foregår. Vi har ordforråd som blant annet består av navn på tall og geometriske former. For å ha et rikt ordforråd, er det ikke nok å kjenne ordene. Vi må også kjenne begrepene som er knyttet til ordene. I matematikk er ord som femtito, to nideler, sirkelsektor eller parabel nærmest uten verdi dersom vi ikke også har innsikt i begrepene knyttet til ordene.

I det muntlige og skriftlige språket har vi en innebygd grammatikk som regulerer bruken av språket. I matematikk har vi også logikkens lover eller vedtatte normer eller regler som på mange måter spiller den samme rollen som grammatikken i det muntlige og skriftlige språket.

Ofte er det slik at historien eller rammen rundt har mye å si for hvordan vi tolker oppgaver eller oppfatter hva aktiviteter går ut på. Presentasjonen og språket en bruker, kan ha stor betydning for hvordan vi løser oppgaver eller gjennomfører aktiviteter.

- De to oppgavene: «Finn 25 % av 16 kroner og finn 16 % av 25 kroner» viser seg å ha svært forskjellig vanskegrad både for elever i skolen og folk som har fullført sin skolegang. Regnemessig er jo dette akkurat samme stykke, men rekkefølgen på tallene, – språket i oppgaven – gjør at folk oppfatter dem svært forskjellig. Den første oppgaven oppfattes som enkel. 25 % er det samme

som 1/4, og mange vil derfor gi svaret 4 kroner direkte. På den andre oppgaven vil det være vanskeligere å «oppdage» at en kan ta 1/4 av 16.

- Formuleringene: «20 mennesker skal dele 5 kilo kaffe» og «5 kilo kaffe skal deles på 20 mennesker» vil av mange oppfattes forskjellig.
- En femåring og en sjuåring sitter og spiller et spill i barnehagen. Sjuåringen vinner, og femåringen blir både sint og lei seg. For å trøste sier sjuåringen: «Det er ikke så rart at jeg vant. Jeg er mye eldre enn deg, det er jo to år mellom oss.» Men da blir femåringen enda sintere. Det er ikke to år mellom dem - det er bare ett! Sett fra femåringens erfaringsverden må jo dette være riktig. I barnehagen er det jo bare 6-åringene som er mellom 5-åringene og 7-åringene.

### Å forstå

I setningen «Min bestefar døde da han var 12 år gammel» er det ingen formelle språklige feil. Det er ingen tvil om hva det står der, og hva setningen uttrykker. Det trengs kunnskap ut over lesekunnskap for å forstå at det er noe som skurrer i setningen, men denne kunnskapen er allmenn og lett tilgjengelig.

Setningen «Ingen slapp inn på kampen uten billett» vil sannsynligvis forstås likedan av de fleste som hører den, og da ved at en underforstått tolker «ingen» som «ingen tilskuer» og ikke ingen rent bokstavelig. Det vil oppfattes som en sær tolking å hevde at spillere, trenere og dommer måtte betale billett.

En elev i første klasse løser subtraksjonsoppgaver på måten som vist til høyre. Eleven har oppfattet at minustegnet handler om å ta bort, men ikke hva en skal ta bort. Språket, og særlig ordene «ta bort», har blitt så overstyrende at eleven tar bort symbolet og ikke forstår forskjellen på mengde, begrep og symbol.

Ei jente i andre klasse arbeider ned oppgaven «Hvor mange ganger kan du trekke 2 fra 8?» Hun svarer: «Det kan jeg gjøre akkurat hvor

mange ganger jeg vil, men svaret blir alltid 6». Her kan en med god grunn lure på hva den egentlige hensikten med oppgaven er, og hvilket svar lærebokforfatterne ser for seg. Tenker de seg svaret 1, 4 eller uendelig?

I matematikklæring er en opptatt av forståelse, men hva innebærer det egentlig å forstå i matematikk? Når elever blir spurt om de forstår, oppfatter de det ofte som et spørsmål om de vet hva de skal gjøre. Derved blir forståelse i stor grad et enten/eller-spørsmål: enten forstår du eller forstår du ikke. En burde i langt større grad snakke om graden av forståelse eller nivået på forståelse. Utvikling av forståelse henger sammen med å kunne knytte kunnskapen til noe en allerede kan eller noe en har et forhold til.

Matematikkens språk inneholder en rekke spesielle ord og fraser som det er viktig at elevene lærer. Dette språket er bare delvis en del av elevenes hverdagspråk, og det krever situasjonsuavhengige språkferdigheter. For å forstå dette språket må en kunne «lese mellom linjene» og tolke de andres språk- og kulturfellesskap. De må kunne bruke matematisk språk og delta i matematiske samtaler og diskusjoner.

Elevene har ulike utgangspunkt for læring knyttet til deres ulike språklige og kulturelle bakgrunn, og de uformelle matematikkunnskaper er ulike fra språk til språk og fra kultur til kultur. Disse uformelle matematikkunnskapene har direkte betydning for elevenes matematikklæring i skolen.

### Tall og ulike språk

I de fleste språk er navn på de fleste tallene knyttet til titalssystemet. Dette henger nok tett sammen med at vi har 10 fingre, og på enkelte språk er denne sammenhengen så tydelig at navnet på tallene er knyttet til hender og føtter. I det lokale språket i Papua på Ny Guinea bruker en et tjuetallsystem der navnet på tallet 5 er det samme som ordet for hånd, 10 det samme som begge hender, 15 en fot (underforstått at en da både har to hender og en fot) og 20 det samme

som begge føtter. I språket til mayafolket i Sør-Amerika ble for eksempel tallet 53 uttrykt som «tredje tå på første fot på tredje person».

Vi har også europeiske språk der vi finner rester av tjuetallsystem, for eksempel fransk og dansk (tre og halv fems som navn på tallet 93). Vi finner også språk der navn på tall er direkte knyttet til alfabetet, for eksempel hebraisk der tallet benevnes med navnet på bokstaven på tilsvarende plass i alfabetet. Også i blindeskrift (Braille) følges dette prinsippet der tallet 1 for eksempel tilsvarer bokstaven a (etter et symbol som viser at det kommer et tall), mens tallet 452 betegnes deb. Romertall bygger ikke på plassverdisystemet, men på et rent additivt system der kombinasjon av streker og symboler i bestemte rekkefølger angir navnene på tallene.

Innenfor mange språk og kulturer har de egne tallnavn på hver finger og avanserte former for fingertelling og også fingerregning. Noen steder har de også egne navn på hvert fingerledd (12 når vi ser bort fra tommelen). I Irak, Tyrkia, India og flere land i Sørøst-Asia har de system for telling i 12-tallsenheter opp til 60. Kanskje er dette bakgrunnen for både 12-tallsystemet og 60-tallsystemet som vi fortsatt har rester av i språket, særlig knyttet til klokka og tidsangivelser?

Uttalemåten for navn på tall varierer svært mye fra språk til språk. På mandarin-kinesisk og vietnamesisk leses tallene konsekvent fra venstre mot høyre. På kinesisk leses for eksempel 11 som shi yi (ti - en), 43 som «si shi san» (fire - ti - tre) og 421 som «si bai er shi yi» (fire - hundre - to - ti - en). På bengali, hindi og urdu leses tallene konsekvent fra høyre mot venstre og lese måten er svært uregelmessig uten noe spesielt system. Også i Europa er det store forskjeller. Engelsk har enkeltord opp til 12, tallene fra 13 til 19 leses fra høyre mot venstre og tallene over 20 leses konsekvent fra venstre mot høyre, for eksempel 47 - forty seven. På tysk leses tallene over 12 konsekvent fra høyre mot venstre, for eksempel 18 - achtzehn og 47 - sieben und firzig.

På norsk er tallene opp til 12 enkeltord, mens

tallene fra 13 til 19 leses fra høyre mot venstre (selv om de nok oppfattes som enkeltord). Tallene fra 20 til 99 leses dels fra høyre mot venstre, dels fra venstre mot høyre. I 1951 vedtok Stortinget den ”nye lesemåten” der disse tallene skulle leses fra venstre mot høyre. Men fortsatt lever de to lesemåtene for disse tallene side ved side i det norske språket.

Desimaltall med to eller tre siffer etter komma uttales ofte med disse to sifrene som «ett tall», for eksempel «1,12 - en komma tolv», «5,250 – fem komma tohundreogfemti» og «pi – tre komma fjorten». I forhold til å forstå desimaltallsystemet ville det vært store fordeler om tallene var blitt uttalt «en komma en to», «fem komma to fem null» og «tre komma en fire». I innlæringen av desimaltallsystemet må en ofte gå veien om en «skolsk» uttalemåte, men samtidig kan en ikke fjerne matematikkspråket for mye fra elevenes hverdagspråk.

Noen språk, for eksempel arabisk, har både entall, total og flertall, og på andre språk kan tall både være objekter og ord som karakteriserer personer eller ting. Tall kan både uttrykke og bli brukt som adjektiv, substantiv eller verb med sin egen grammatikk. På for eksempel dhivehi og tyrkisk kan tallord bøyes og kan ha mange former. Formen på tallene kan også si noe om regneoperasjonen en skal benytte.

I noen polynesiske språk kan tall bli handlinger mer enn resultatet av opptellinger. På engelsk har en presens samtidsform, for eksempel «There are three bottles on the table». I polynesiske språk kan tall innta samme rolle som verb, og vi kan finne uttrykk av typen «The bottles are threeing on the table».

### Hva et språk kan og ikke kan uttrykke

Ulike språks oppbygging eller grammatikk kan ha betydning for hva som kan uttrykkes og hvordan det kan uttrykkes. Serbokroatisk har for eksempel ikke bestemt form, og formelen for arealet av en trekant kan derfor ikke uttrykkes som på norsk: Grunnlinjen ganger høyden delt på 2. Formelen blir derfor mer av formen: En

Norsk	Engelsk
Jeg tar med meg en blyant eller en penn	I will bring a pen or a pencil
Jeg går på kino, eller jeg gjør leksene mine	I will go to the movies or do my homework
Jeg brukte natriumklorid, eller vanlig bordsalt	I used sodium chloride, or common salt

Figur 1

side ganger tilhørende høyde delt på 2. Dette betyr at også oppfatningen og forståelsen av formelen blir forskjellig i de to språkene.

De tre setningene i Figur 1 inneholder alle ordet «eller (or)». I en del ikke-indoeuropeiske språk, blant annet kpelle, krever disse tre eksemplene hvert sitt ord som alle tre til norsk må oversettes med eller, og til engelsk med or. Men det må bety at logikken, og derved også beviseteknikkene blir annerledes enn i indoeuropeiske språk. Selve logikken kan altså være mer eller mindre kontekstspesifikk.

Maorifolket på New-Zealand bruker en viss type argument for å beskrive relasjoner mellom hendinger, blant annet kan de implisitt i ordene de bruker, beskrive hvordan en beslutning er tatt, ikke bare eksplisitt beskrive selve beslutningen. En sirkel beskrives ikke statisk innenfra eller utenfra, men mer dynamisk ut fra hvordan den er formet.

På enkelte språk og i enkelte kulturer, blant annet kinesisk, legges det stor vekt på å klargjøre når multiplikasjon er kommutativ og i hvilke kontekster den ikke er det. I Norge for 50 år siden var en i skolen opptatt av å presentere forskjellen på å finne prisen på 5 kilo epler til 3 kroner per kilo og 3 kilo epler til 5 kroner per kilo. Det var egne navn på faktorene i multiplikasjonsstykker, multiplikand og multiplikator, og en skilte klart mellom de to multiplikasjonsmåtene (Figur 2).

3 × 5	5 × 3
Tre femmere	Fem treere
Tre multiplisert med fem	Fem multiplisert med tre
Tre ganger fem	Fem ganger tre

Figur 2

I andre språk og kulturer gjenspeiles slike praktiske situasjoner i selve språket ved at en for eksempel i utsagnet fem ganger tre eller tre ganger fem må bruke ulike ord for å uttrykke «ganger». På indoeuropeiske språk uttrykkes eller speiles multiplikasjonens kommutative egenskap i selve språket, men andre språk eksplisitt uttrykker at ulike multiplikative utsagn ikke er kommutative (i den praktiske situasjonen).

Mangekanter blir navngitt ut fra ulike kriterier på ulike språk. På norsk er det ordet kant fra dagliglivet som er basis (trekant, firkant osv.), på tysk hjørne (dreiecke, vierecke osv.), på engelsk vinkel (triangel, quadrangel). På både tysk og engelsk bruker en i dagliglivet ofte ordet for kvadrat (square, Kvadrat) som betegnelsen på en mer generell firkant. Engelsk har en rekke ord for ulike firkanter, og da ofte et ord som brukes i hverdagslivet og et annet i matematikk i skolen (eks. square, quadrilateral figur, quadrangle, oblong, rectangle, pentagon, hexagon osv.). På norsk tegnspråk bruker en tegn som i stor grad beskriver selve formen på figuren. Hvilke kriterier en bruker for å navngi ulike geometriske figurene, har betydning for hvordan vi oppfatter og forstår figurene. Det har for eksempel direkte betydning for vår oppfatning av en figur om vi kaller den trekantet, tresidet, trehjørnet eller trevinklet.

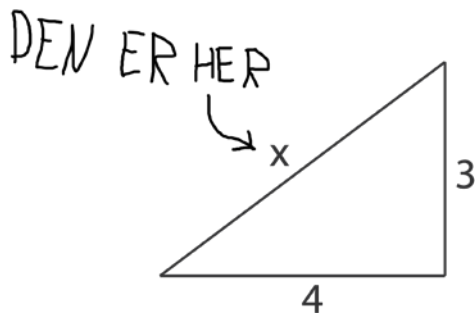
## Ord med ulik betydning i hverdagspråk og i matematikkens språk

Vi har en rekke ord og begreper som har en ganske annen betydning i hverdagspråket enn i matematikkens språk. Begrepene kan ha samme opphav og derved kunne relateres til hverandre som for eksempel «Byens sentrum – sentrum i en sirkel», «Å være normal – normalen på en linje» og «Å rette oppgaver – rette linjer». Men det kan også være vanskelig å se relasjonen, og det i det hele tatt er noen, som i for eksempel «Tangent på et piano – tangent til en sirkel»,

«Roten på et tre – roten av et tall», «Synspunkt – punkt på en linje», «Produkt (vare) – produktet av to tall» og «Å ha en funksjon – en lineær funksjon»

Det finnes mange ord i matematikk med dobbelt betydning, en innenfor matematikk og

### Oppgave 2: Finn x



Figur 3

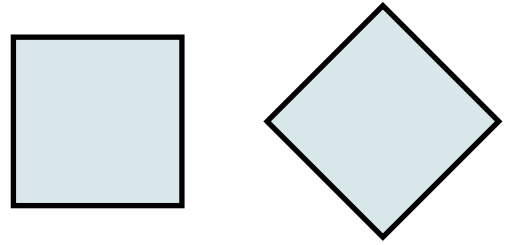
en annen i hverdagslivet med liten eller ingen tilknytning til matematikk. Eksempler på dette er: rot, kropp, gruppe, rute, kort, form og regel. Figur 3 beskriver hvor galt det kan bli når en blander sammen disse to språkene. En tilsvarende sammenblanding har skjedd når en elev sier at forholdet mellom tallene 2 og 3 er godt.

Relasjonsbegrepene og de tilsvarende ordene og symbolene blir ofte behandlet på en enkel og misvisende måte. Symbolene større enn ( $>$ ) og mindre enn ( $<$ ) blir ofte knyttet til illustrasjoner av krokodillegap eller fuglenebb. Den mer hverdagslige betydningen av ordene ofte knyttet til størrelse mer enn antall, blir sjelden eller aldri tatt opp. Ordene større blir nærmest brukt synonymt med flere, og ordet færre er ofte et fremmedord. I hverdagspråket bruker en ofte negasjoner som ikke så mange eller ikke så store. Det motsatte av mer er i noen sammenhenger mindre, mens i andre er det ikke mer. Hvis du blir spurt om du vil ha mer kaffe, vil folk se rart på deg om du svarer: «Nei takk, jeg vil ha mindre».

Mengder kvantifiseres og grupperes på ulike måter på ulike språk. Dette gjelder også for språk som ligger så nært hverandre som norsk og dansk. Når en mengde kan telles, bruker en på dansk ordet mange, for eksempel mange blåbær, mens vi på norsk bruker mye. Å plukke mange blåbær høres rart ut på norsk. Når vi derimot har vært på fisketur, kan vi både ha fått mange fisker og mye fisk. Men det betyr ikke akkurat det samme om vi har fått mye fisk eller mange fisker.

Ordet «side» har dobbelt betydning også innenfor matematikk. Dersom en holder opp et A4-ark og spør hvor mange sider denne figuren har, kan en få mange ulike svar avhengig av hva en oppfatter som sidene i figuren (forside og bakside eller sidekantene). Spør en hvor kantene på arket er, får en ofte også flere svar. Noen oppfatter kanten som sidekanten mens andre hevder at kanten er på hjørnene.

En student holdt et kvadratisk ark som figur 4 (til venstre) foran en tredjeklasse og spurte hva den het. Klassen svarte unisont kvadrat. Studenten dreide arket slik at figuren ble som den til høyre og spurte hva denne het. Ingen av elevene svarte, og etter en kort stund sa studenten: «Når figuren er slik (figuren til venstre), er det et kvadrat. Men når den er slik (figuren til høyre) er det en ruter». I veiledningsøkta etterpå fikk vi



Figur 4

en lang og fruktbar diskusjon om begrepsbruk og språk i matematikk. I studentens forklaring er det ordet men som er det problematiske. Han kunne gjerne sagt: «Figuren til venstre er det et kvadrat. Og når vi holder den slik (figuren til høyre), kan vi også kalle den en ruter».

Dette siste eksempelet illustrerer hvordan små nyanser i språket kan ha stor betydning for hvordan et begrep oppfattes og forstås. Det er en stor utfordring for alle som arbeidet med elevers læring av matematikk å balansere en riktig og eksakt bruk av matematikkens språk og regler med elevenes hverdagspråk og hverdagsliv. Pendling mellom disse to arenaene er en av de store utfordringene for matematikklærere på alle trinn i skolen.

### Avslutning

Elever med en annen språklig bakgrunn enn den norske har ofte blitt sett på som et problem, og det å lære norsk språk er blitt sett på som nøkkelen til å klare seg godt i norsk skole. I forhold til matematikklæring er det viktig å beholde sitt eget språk samtidig som en lærer norsk. Pendlingen mellom språkene er helt nødvendig i begrepslæringen, ellers blir lett de norske matematikkordene kun ord med snevert, og i noen tilfeller direkte feilaktig innhold. Det betyr at en ikke skal forsøke å fjerne de språklige og kulturelle forskjellene i et matematikklasserom ved å legge hovedvekten på symbolmanipulasjon og ferdighetstrening. En skal tvert imot legge vekt på språk og kommunikasjon i klasserommet og gjennom det bidra til bedre begrepsforståelse. I

en artikkel om tospråklige elevers bruk av begge språk ved løsningen av virkelighetsnære matematikkoppgaver i 4.-5. klasse i Texas, konkluderer Higinio Dominguez med:

Når skolen utelukker det ene av de tospråkliges språk, utelukker den også uunngåelig det repertoar av erfaringer som er knyttet til det språket. ... Jeg argumenterer for å gi elevene mulighet til å bruke begge sine språk i matematikk sammen med de hverdagserfaringer som betyr noe for dem i deres liv. På den måten kan de uttrykke, dele og utveksle meninger og ideer på måter som mer helhetlig kan vise deres matematiske kunnskaper og kompetanse. (Dominguez, 2011, s 325, min oversettelse)

I skolen må vi derfor slutte å se på flerspråklighet som en ulempe og hindring for læring. Det er en stor fordel å kunne flere språk, og flerspråklighet er en ressurs i matematikklæringen, en ressurs som skolen burde utnytte og utvikle til beste for alle elever.

#### Til inspirasjon og videre lesning:

- Barton, B. (2004) *Mathematical discourse in different languages: Implications for mathematics teachers*. I B. Clarke et al. (red.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (s. 365-378). Göteborg, Sverige: NCM.
- Botten, Geir (2003). *Meningsfylt matematikk: Nærhet og engasjement i læringen*. Landås, Caspar Forlag AS.
- Dominguez, H. (2011). Using what matters to students in bilingual mathematics problems. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 305-328.
- Planas, N, & Setati, M. (2009). *Bilingual students using their languages in the learning of mathematics*. *Mathematics Education Research Journal*, 21(3), 36-59