

Olof Magne

# Barn gör upptäckter – och lär matematik

## Vad uppsatsen handlar om

Nya ideer dyker upp om elevernas matematikinläring. Försökscentret i tyska Bielefeld har Bauersfeld som en entusiastmerande ledare. I Dortmund finner man bl.a. Winter, Wittmann och Müller och nya ideer skapas inom projektet «mathe 2000». Man utvecklar den *upptäckande inläringen i matematikundervisningen*. Nytankandet finns också i Nordamerika, t.ex. i dokument som National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) *Principles and standards for school mathematics* och årsboken med titeln *Learning mathematics for a new century* (2000). Syftet är att ge alla elever tillgång till flexibla och matematiskt rika läroplaner, högkvalificerade lärare och en högklassig engagerande matematikundervisning med chans för alla att utveckla kunskaper.

## Vad är upptäckande inläring

*Entdeckendes Lernen* är ett svåröversatt tyskt uttryck som karakteriseras av att egenaktivitet och självansvar står i centrum för elevens utbildning. Jag väljer att på svenska tala om *upptäckande inläring*. Tolka uttrycket så, att barnet upptäcker lärandets konst – eller att barnet lär genom att göra upptäckter.

Exempel: När blir min skugga särskilt lång eller särskilt kort? Var är höger och vänster i min spegelbild?

Vilka saker fastnar på en magnet? Varför är  $2 + 6 = 6 + 2$ ?

Upptäckande inläring definieras som en utbildning där eleven lär genom att vara aktiv, att konstruera sin kunskap och att produktivt öva kunskapen. Eleven lär genom att handla explorativt, pröva och tänka ut vad matematik är.

Det rör sig om kända tankar. Grundidén är bekant hos reformpedagogen John Dewey. Matematikdidaktikern Johannes Kühnel är en tysk föregångare med sin 1916 utgivna *Neubau des Rechenunterrichts*. År 1984 föreslog Heinrich Winter *entdeckendes Lernen* som grundidé till ett nytt matematikdidaktiskt synsätt. Bauersfeld, Winter och Wember följde upp med praktiska skolförsök.

Man kritiserade de äldre läroplanerna och verksamhetsformerna, framför allt elementarundervisningen i de lägsta årskurserna.

Undersökningar visar enligt kritikerna att matematiklärarna förmedlar mekaniska arbetsvanor och därigenom passiviserar eleverna. Enligt kritikerna är det sällsynt med aktiv problemlösning.

## Passiviserande och aktiverande inläring

Wittmann förklarar detta med att historien om teori och praxis i skolinlärande och undervisning präglas av en ständig kontrovers mellan

två principiellt motsatta positioner. Han kallar dem den passiviserande, respektive den aktiverande positionen. Den *passiviserande positionen* utgår från den filosofiska empirismen och den psykologiska behaviorismen, där barnets kunskapsstillväxt främst beror på en statisk-mekanisk effekt av yttre påverkningar, som i Lockes berömda yttrande: i begynnelsen var barnets sinne en oskriven tavla (tabula rasa). Passiviserande undervisning är att läraren förmedlar befintligt vetande. Alternativet kallas den *aktiverande positionen* med ursprung i Leibniz och Kants filosofi. Denna tankeriktning är dynamisk och hämtar impulser från konstruktivism (Bauersfeld, Piaget, von Glasersfeld) samt behovs- och motivationsmodeller (psykoanalys, sociologi). Undervisning befinner sig mellan dessa poler, men Wittmann förklarar att uttryck som «bibringa», «inskräpa», «förmedla» och «motta» karakteriserar en förgången undervisningskonst. Elevens lärande bör främst vara inriktat på att «aktivt bearbeta», «frivilligt söka», «gemensamt upptäcka», eftersom eleven utvecklas i ett socialt nätverk.

### Den passiviserande undervisningen

Som symbol för den passiviserande positionen innehöll tyska läroplaner in i den allra senaste tiden bestämmelser om att «räkneundervisningen bara kan föra till framgång om den fortskrider i små och välplanerade steg från lätta till svåra moment» (1955 års räknekurs i Nordrhein-Westfalen). Dessa «steg» är «hierarkiskt» ordnade. Wittmann hävdar att just *småstegsprincipen* och «steg-hierarkierna» mer än något annat leder till den mekaniska drillen. Eleven blir styrd att öva de «hierarkiskt» ordnade färdigheterna, och varje övning begränsas till en enda uppgiftstyp. Konsekvensen blir att eleven får svårt att upptäcka matematiska tankeprinciper. Eleven förlorar överblicken över stoffet. Kanske lär sig eleven färdigheter, men inte matematik.

### Aktiverande undervisning

Principiellt helt annorlunda än småstegsövandet sker inlärande och övande enligt principen för aktiv och upptäckande inläring. I 1985 års räknekurs i Nordrhein-Westfalen avvecklas de små stegens herravälde till förmån för en helhetssyftande, upptäckande inläring. Hierarkifilosofin överges. Redan från början möter eleverna omfattande matematikområden och lär sig variera uppgifterna inom vida gränser. Det betyder inte att övandet försummas, eftersom upptäckande och övande ses som två sidor av samma process. Inte heller är det fult eller förkastligt med rutiner som utantilläsning, t.ex. av tabellerna. Är barnen lagom motiverade stimulerar de sig själva att träna och drilla färdigheter.

Exempel: Gissa tärningens tal. Sjuåringar ser först efter hur många prickar det blir då man kastar tre tärningar. De lär sig olika lekar med tärningarna. Vilken strategi bör de använda för att tala om antalet prickar på varje/alla tärningarna? Därefter väljer de följande lek: läraren kastar de tre tärningarna, men döljer dem så att barnen inte ser prickarna. Genom att fråga klokt kan barnen tänka ut vilka prickar som finns på varje tärning. Det är 13 prickar, säger läraren. Barnen börjar frågandet. Britta: Finns det en trea? – Läraren: Nej – Stina: Är det en fyra? – L: Ja. – Bo: Är det en fyra till? – L: Ja. – Britta: Då är det fem på den sista! – En variant är att barnen skriver det möjliga antalet prickar som det kan finnas på tre tärningar, då det är 13 prickar sammanlagt:  $13 = 4 + 4 + 5$  etc. De förkastar falska utsagor som  $13 = 4 + 4 + 7$ .

Kan barn klara leken, innan de med de små stegens metod analyserat talet 13? Jovisst! Det tillhör Wittmanns praxis att eleverna från början arbetar med naturliga talen 0-20, dvs. med ett så stort talområde att de kan upptäcka tankeprinciper, t.ex. ... variera lösningar av autentiska problem ur deras vardagsvärld, se likheter mellan räknesätt, finna tallagar om

talens egenskaper. Kort sagt: de matematiserar inlärandet.

För de flesta barnen i sjuårsåldern är det stimulerande och realistiskt att undersöka matematik som innehåller de naturliga talen 0–20. Handikappade barn har kanske svårigheter med många av dessa tal, men också de gillar individuella aktiviteter inom talområdet 0–20, såsom att bedöma vilken av två burkar som har flest knappar (3 resp. 10); räkna till tio, till tolv, tretton, tjuugo; säga ett tal som kommer efter nitton, före tio, mellan tre och sju. Aktiviteterna bör göras öppna så att barnen ser att de har många möjligheter till lösning.

En viktig del av undervisningen är att låta barnen förstå att matematik är ett spel med regler. En lek som Gissa tärningens tal ger barnen tillfälle att finna sådana regler. I projektet «mathe 2000» ingår experiment där barnen använder spel och lekar för att finna lekstrategier. Erich Wittmann och Gerhard Müller (1990) utvecklar principer för s.k. halvskriftlig räkning, Petra Scherer (1995) visar hur barn i specialklasser arbetar med vad hon kallar «Handelndes Lernen», dvs. med konstruktiva aktiviteter, och (1996) hur de tänker i NIM-spelet. Anja Spielbacher (1996) visar hur begåvningshandikappade högstadieelever «fördubblar med spegeln». C. Dicke (1997) låter barn mäta med meterstav. Joachim Hönig (2000) ger exempel på hur gravt fysiskt handikappade högstadieelever lär sig geometri med hjälp av pussel och sagolekar.

### Barn upptäcker matematik

Helt visst kan vi lära mycket från den tyska matematikinläringen genom upptäckande. Den bärande iden är att utnyttja barns naturliga nyfikenhet och upptäckarglädje från tidigaste ålder, alltså redan i förskolan. Avsikten är att fostra barn till engagerade och aktiva människor då de lär sig matematiken. Det fina i metoden är dels att barnen uppmuntras till aktivitet, dels att de får positiva förebilder av

målmedvetna människor (föräldrar, lärare och barn). De vuxna i barnens omgivning skapar förutsättningarna och möjligheterna för lärandet.

I nätverket kring barnen finns hjälp och stöd för barn att tänka. Där möter barnen problem, tal, former och upptäcker kanske tankeprinciper. Som en röd tråd går *att tänka i mönster*. Det kan börja med att barnen konstruerar *fysiska mönster*, som att göra ett pärlmönster i ett halsband. Sedan blir det *tanke-mönster*. Exempel: addition är ett tankemönster, en ekvation kan också ses som ett tankemönster (Magne, 2001).

Senare finner barnen *talmönster*, som udda-jämna tal, primtal, multiplikationskombinationer, proportioner mellan storheter etc. De tolkar *geometriska mönster* som det gemensamma hos olika runda, trekantiga och fyrkantiga saker. De kan spåra de *räknelagarna* (kommutativa lagen, distributiva lagen etc.). Matematiskt lärande betyder i stort sett detta: *Att upptäcka tankeprinciper* (det som ofta kallas «förstå») och *Att använda dessa tankeprinciper* (bl.a. att lära sig lösa problem och «öva» matematik).

Barnen finner att de ofta kan lösa problem efter ett och samma mönster. Läraren ger barnen uppslaget att «upptäcka ett mönster», dvs. de ska upptäcka något gemensamt hos tre objekt och finna hur dessa skiljer sig från ett fjärde. Det är ett uppslag som utnyttjades i det populära svenska TV-programmet *Röda tråden*. Det är mönstertänkande då läraren låter barnen berätta om sina egna olika lösningsmönster. Barnen upptäcker ofta andra mönster än dem som läraren tänker på. Upptäckande matematikundervisning bör starta i förskolåldern.

Att barn löser «tal-gåtor» visar följande historia som en förskollärare berättat. Några femåriga flickor bestämde sig för att göra en tavla med de 101 dalmatinerna. Efter en tid kom frågan: Hur många till ska vi rita? De hade redan ritat 67. Flickorna funderade. Läraren

erbjöd hjälp, men de ville lösa gåtan på egen hand: «Absolut inte! Vi klarar oss själva.» Efter att pratat om saken, kom de på följande ide: Vi börjar med «67». Och någon börjar med «ett». Alltså får en av flickorna räkna vidare från 67, alltså säga talet 68. – Samtidigt säger en annan flicka ett. Sedan fortsätter den första flickan med 69 och den andra med två osv. osv. När den första är framme vid 101, så har den andra hunnit till 34. Saken är klar. Flickorna ska rita ytterligare 34 dalmatiner. Matematiskt är detta en intressant lösning. Flickorna har flyttat upp talramsans nollpunkt från dess vanliga plats till en plats mitt för 67. Detta kallar vi parallellförskjutning av talramsans.

## Referenser

- Bauersfeld, H., Busmann, H., Krummheuer, G., Lorenz, J.H. & Voigt, J. (1983) *Lehren und Lernen von Mathematik*. Köln: Aulis.
- Burke, M.J. & Curcio, F.R. (2000) (Eds.) *Learning mathematics for a new century*. 2000 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Dicke, C. (1997) Messen mit dem Meterstab. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 48, 335-338.
- Hönig, J. (2000) Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Körperbehinderte. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 51 (4), 150-155.
- Kühnel, J. (1916) *Neubau des Rechenunterrichts*. Leipzig: Klinkhardt.
- Magne, O. (2001) *Barn upptäcker matematik*. Umeå: SIH Läromedel (under utgivning). *Principles and standards for school mathematics* (2000). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Scherer, P. (1995) *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte*. Heidelberg: Universitätsverlag C. Winter.
- Scherer, P. (1996) Das NIM-Spiel: Mathematisches Denken auch für Lernbehinderte? In: W. Baudisch & D. Schmetz (Hrsg.) *Mathematik und Sachunterricht im Primär- und Sekundärbereich*. Frankfurt a.M.: Diesterweg. S. 88-98.
- Scherer, P. (1999) *Produktives Lernen für Kinder*. Stuttgart: Klett.
- Spielbacher, A. (1996) „Verdoppeln mit dem Spiegel“ - eine Möglichkeit aktiv-entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht der Schule für Geistigbehinderte. In: W. Baudisch & D. Schmetz (Hrsg.) *Mathematik und Sachunterricht im Primär- und Sekundärbereich*. Frankfurt a.M.: Diesterweg. S. 111-125.
- Wember, F.B. (1986) *Piagets Bedeutung für die Lernbehindertepädagogik*. Heidelberg: Schindele.
- Winter, H. (1984) Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. *Grundschule*, 16, 26-29.
- Winter, H. (1987) *Mathematik entdecken*. Frankfurt a. M.: Cornelsen Scriptor.
- Wittmann, E.Ch. & Möller, G.N. (1990) *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Stuttgart: Klett (3. Aufl. 1993).